Proximity Gaps 与 Correlated Agreement：FRI 安全性证明的核心

- Jade Xie jade@secbit.io
- Yu Guo yu.guo@secbit.io

本文主要受 Proximity Gaps & Applications to Succinct Proofs 视频中的启发，结合论文[BCIKS20]，介绍 Proximity Gaps 的概念，以及与 Proximity Gaps 有着紧密联系的 Correlated Agreement 定理，其在 FRI 安全性证明中起了非常重要的作用。

在 FRI 协议中，对于一个多项式 $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{F}_q$ ，设 $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1}$ ，其是一个次数小于 k 的多项式，将其在域 $\mathcal{D}$ 上进行求值，其中 $|\mathcal{D}| = n$ ，则 $f \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}, k]$ 。Prover 想向 Verifier 证明 $f(x)$ 的次数确实是小于 k 的。如果 $f \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}, k]$ ，则 Verifier 输出 `accept` ，如果 f 距离对应的编码空间 $\mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}, k]$ 有 δ 远，则输出 `reject` 。Verifier 能够获得的是关于一系列函数的 oracle ，FRI 协议想要实现的就是 Verifier 查询 oracle 尽可能的少，并能区分出 f 属于上述哪一种情况。

不妨设 $k-1$ 为偶数，那么

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^{k-1} \\
&= (a_0 + a_2 x^2 + \cdots + a_{k-1} x^{k-1}) + x(a_1 + a_3 x^2 + \cdots + a_{k-2} x^{k-3}) \\
&:= g(x^2) + x h(x^2)
\end{aligned} \tag{1}
$$

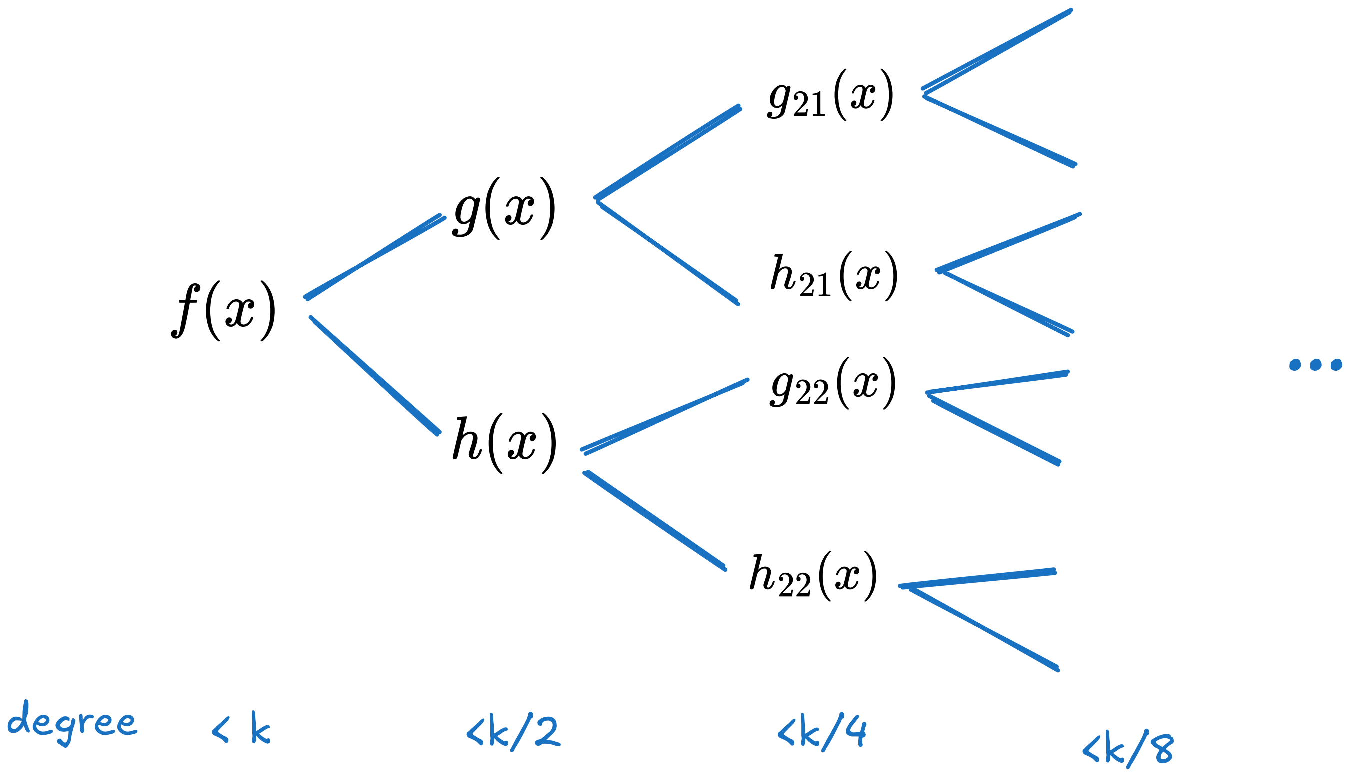
可以发现函数

$$
\begin{aligned}
g(x) &= a_0 + a_2 x + \cdots + a_{k-1} x^{\frac{k-1}{2}} \\
h(x) &= a_1 + a_3 x + \cdots + a_{k-2} x^{\frac{k-3}{2}}
\end{aligned} \tag{2}
$$

开始 Prover 想向 Verifier 证明 $f(x)$ 的次数小于 k ，现在可以分解成三个子问题：

1. 证明函数 $g(x)$ 的次数小于 $k/2$ ，即 $g(x) \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$
2. 证明函数 $h(x)$ 的次数小于 $k/2$ ，即 $h(x) \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$
3. 证明 $f(x) = g(x^2) + x \cdot h(x^2)$

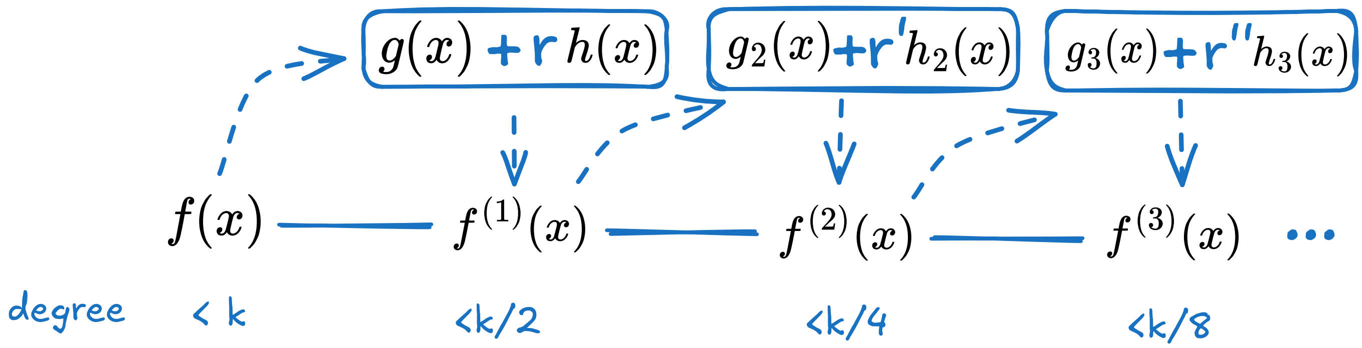
其中 $|D^{(1)}| = n/2$ 。第三项是证明奇偶拆分是正确的。同样可以分别对 $g(x)$ 和 $h(x)$ 进行类似 $f(x)$ 那样奇偶项的分解，分别分解成两个次数小于 $k/4$ 的多项式，这样就要证明 4 个多项式的次数小于 $k/4$ ，直到最后分解到证明常数多项式。这个过程如下图所示，可以发现要证明的多项式在以 2 的指数的形式增长。在这个过程中，为了证明奇偶拆分是没有问题的，需要发送关于所有这些多项式的 oracle 给 Verifier ，可以想象发送的多项式实在是太多了，随着 k 的增加是爆炸性增长的。



既然我们的目的是证明多项式的次数小于某一个数，我们的想法是不希望对 $f(x)$ 分解问题时像上面那样分叉，分成两个多项式，我们想要下一步证明一个多项式次数小于 $k/2$ ，这样能大大减少发送的多项式。怎么做到这一点呢？我们可以向 Verifer 要一个随机数 $r \in \mathbb{F}$ ，将 $g(x)$ 和 $h(x)$ 作线性组合，得到 $g(x) + r \cdot h(x)$ ，将 $f(x)$ 的次数小于 k 的问题分解为：

1. $f^{(1)}(x) = g(x) + r \cdot h(x)$ 的次数小于 $k/2$ ，即 $f^{(1)}(x) \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$

这时发送的多项式的图形就变成下图这样了，可以看到要发送的多项式的 oracle 大大减少了。

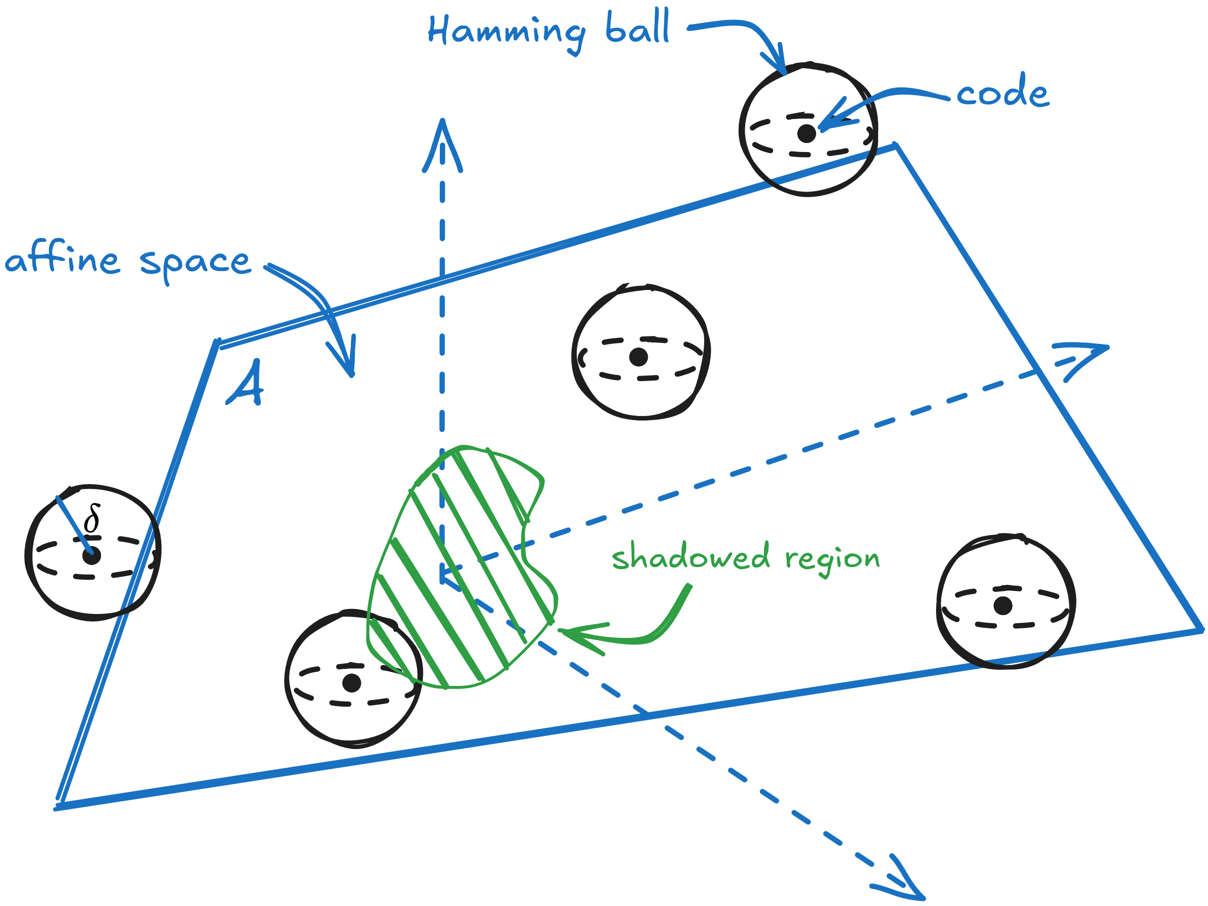


那么现在剩下一个问题是，这样做是否和原来的方式等价呢？当然如果 Prover 是诚实的，根据 RS 编码的线性性，$g(x), h(x) \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$ ，那么其线性组合之后依然是在 $\mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$ 中的。但如果 Prover 作弊呢？例如 $g(x)$ 距离编码空间 $\mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$ 有 δ 远，我们希望用随机数 r 进行线性组合之后的 $g(x) + r \cdot h(x)$ 还是有 δ 这么远，这样 Verifier 能够发现 Prover 作弊。我们不希望的是折叠之后的 $g(x) + r \cdot h(x)$ 距离对应的编码空间变得更近了。Proximity Gaps 告诉我们发生这样的概率是非常小的，和中彩票一样，这样我们就可以大胆的用随机数进行折叠了。

Proximity Gaps

上面我们考虑的是两个多项式折叠的情况，实际中我们会用到随机数一次进行多折或者对多个多项式进行 batch。这里我们不妨考虑一般的情况，假设有 m 个向量 $(u_0, \ldots, u_{m-1})$ ，对每一个 $u_i \in \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ ，可以看作是 $\mathcal{D} \to \mathbb{F}$ 上的多项式，也可以看作是 $|\mathcal{D}| = n$ 维的向量。对这 m 个向量进行线性组合，记作 $A = \mathrm{span}\{u_0, \ldots, u_{m-1}\}$ ，这里的 A 是 $\mathbb{F}^{\mathcal{D}}$ 中的 affine space ，记编码空间 $V := \mathrm{RS}[\mathbb{F}, \mathcal{D}, k]$ 。

我们关心 A 中的元素与编码空间 V 之间的距离关系是怎样的。如下图所示，将编码空间 V 中的所有 code 表示为点，以这些点为圆心，以 δ 为半径画一个球体。A 形成的空间用一个二维平面表示，如果 A 中的元素距离 V 中的某些 code 之间的相对 Hamming 距离小于等于 δ，就说明与图中的某些 Hamming 球之间有交集，将所有的这些交集并起来就形成了图中绿色的阴影区域。换句话说，对于阴影区域 $S \subset A$ 的每一个元素 a ，一定存在一个 $v \in V$ ，使得 $\Delta(a, v) \leq \delta$ 。



我们将 $\mathbb{F}^{\mathcal{D}}$ 中的所有的 affine space 组成一个集合 $\mathrm{C}_{\mathrm{Affine}}$ ， Proximity Gaps 结论[BCIKS20, Theorem 1.2]告诉对于任意一个 $A \in \mathrm{C}_{\mathrm{Affine}}$ （如 $A = \mathrm{span}\{u_0, \ldots, u_{m-1}\}$）， 都有要么 A 中的所有的元素都在阴影区域里面，要么 A 中只有很少的一部分元素在阴影区域中。不可能说 A 中一半的元素在阴影区域，而另一半的元素不在阴影区域中。用公式表达就是只能符合下面两种情况之一：

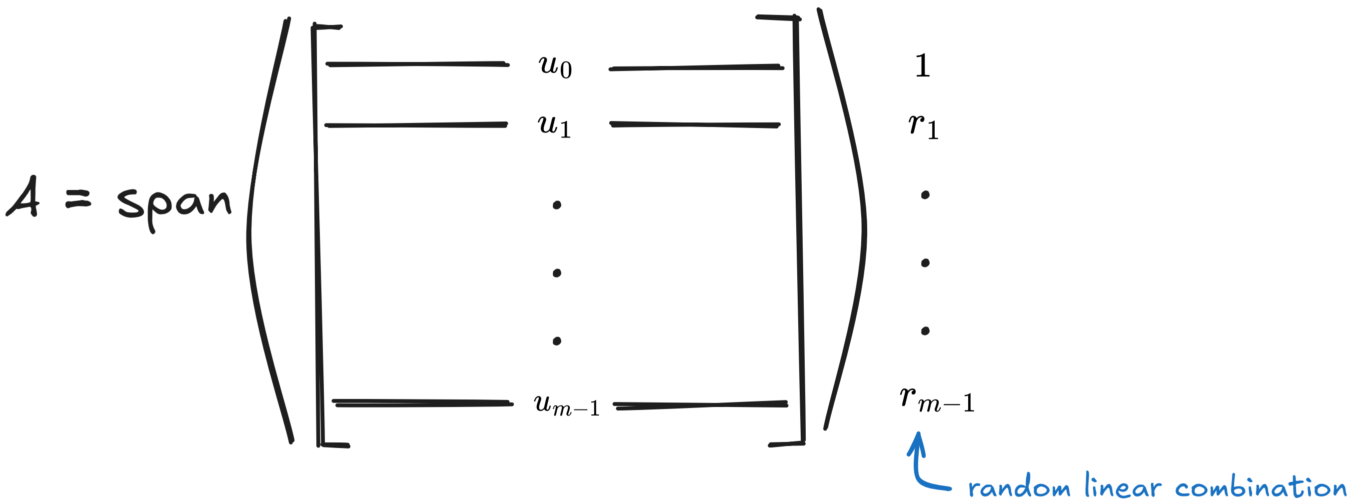
1. $\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] \leq \epsilon$
2. $\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] = 1$

我们称 δ 为 proximity 参数(proximity parameter)， ϵ 为误差参数(error parameter)，它是一个非常小的数。当然关于 ϵ 有具体表达式的，其和 q, n, ρ, δ 是相关的，即 $\epsilon = \epsilon(q, n, \rho, \delta)$ ，其中 ρ 表示码率， $\rho = \frac{k}{n}$ 。

那么这里的阴影区域代表什么呢？这个结论与 FRI 的安全性分析之间有什么关系呢？下面针对诚实的 Prover 和作弊的 Prover 这两种情况来应用 Proximity Gaps 结论进行分析。

诚实的 Prover

如果是诚实的 Prover，那么对 $(u_0, \ldots, u_{m-1})$ 中的每一个向量都有 $u_i \in V$ 。



由 RS 编码的线性性，我们知道线性组合之后一定还在编码空间 V 中，因此 $A \subset V$，此时 A 中所有的元素都在 V 中，那么 Verifier 进行随机线性组合之后，任意选取一点 $a \in A$，都能得到 $a \in V$，此时 Verifier 一定会接受。这种情况对应 Proximity Gaps 中的第二种情况，取 $\delta = 0$，此时

$$\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) = 0] = 1 \tag{3}$$

恶意的 Prover

如果 Prover 作弊，假设在 Prover 发送给 Verifier 的 m 个向量 $\vec{u} = (u_0, \ldots, u_{m-1})$ 中混入了一个向量距离 V 有 δ 远，即

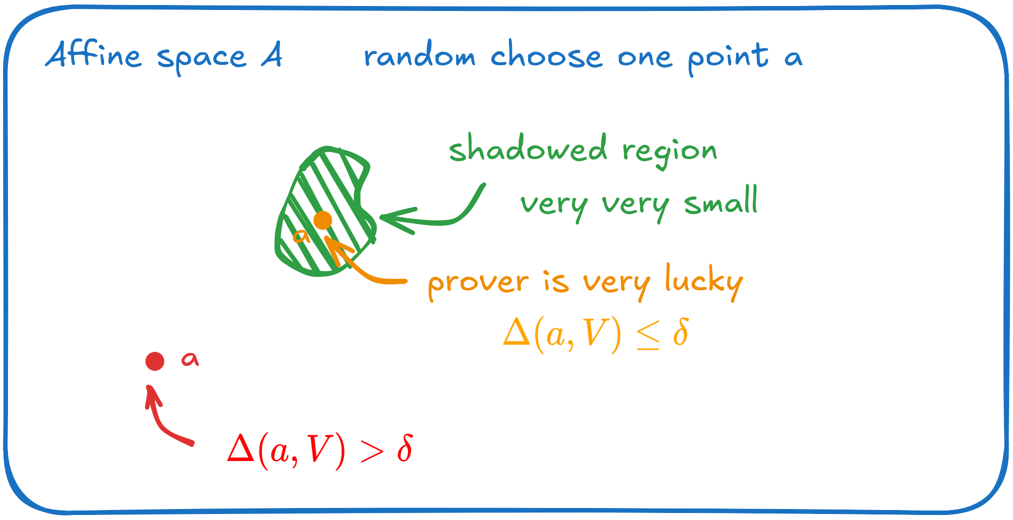
$$\exists u_i^* \in \vec{u}, \quad \Delta(u_i^*, V) > \delta \tag{4}$$

那么在 $A = \mathrm{span}\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ 中，取 $a^* = u_i^* \in A$，肯定有

$$\exists a^* \in A, \quad \Delta(a^*, V) > \delta \tag{5}$$

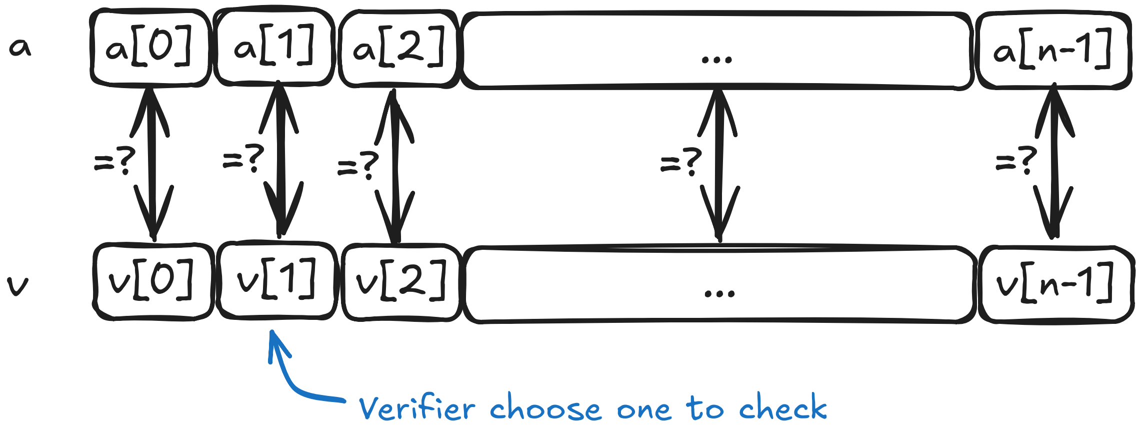
此时根据 Proximity Gaps 结论，已经有 A 中的一个元素不在阴影区域内了，因此排除 $\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] = 1$ 这种情况，只能是 $\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] \leq \epsilon$。这也说明哪怕 m 个向量中只有一个向量距离对应的编码空间有 δ 那么远， A 中大部分元素都距离 V 有 δ 那么远。换句话说，随机从 A 中选取的一点 a，其与 V 之间的距离能代表 m 个向量中距离 V 的最远距离。

现在 Verifier 就从 A 中随机选取一点 $a \in A$，来检查 $\Delta(a, V)$ 是否大于 δ，会出现两种情况。一种是选到了图中的阴影区域，另一种是选到阴影区域之外。



情况 1： $\Delta(a,V) \le \delta$ 。此时 Verifier 选取的点 a 在阴影区域内。我们说此时 Prover 非常幸运，虽然 Prover 提供了的错误的 witness ，即距离编码空间 δ 远，但是随机线性组合之后距离编码空间变得有 δ 那么近了，此时 Prover 能成功骗过 Verifer 。出现这种情况对 Verifier 来说不是好事，好在 Proximity Gaps 结论告诉我们 $\Pr_{a \in A}[\Delta(a,V) \le \delta] \le \epsilon$ ，也就是随便选一点能进入阴影区域的概率是非常非常小的，Prover 需要像中彩票那么幸运才行，也就是此时 Prover 能成功骗过 Verifier 的概率不会超过 ϵ 。

情况 2： $\Delta(a,V) > \delta$ 。此时 Verifier 选取的点 a 在阴影区域外。Prover 还有可能作弊成功吗？还是有的，因为 Verifer 收到了关于 a 的 oracle ，但是不会去检查 a 中的所有值，只想查询某一些值来看是否在 V 中。如果 Verifier 只查询一次，由于 $\Delta(a,V) > \delta$ ，那么 a 中有大于 δ 比例的分量与 v 对应的分量不等，此时 Verifier 有大于 δ 的概率抓到 Prover 作弊，也就是说此时 Prover 能作弊成功的概率不超过 $1-\delta$ 。



如果 Verifier 重复查询 κ 次，此时 Prover 能作弊成功的概率不会超过 $(1-\delta)^\kappa$ 。

那么，作弊的 Prover 能够成功的概率是上述两种情况的联合概率，即不会超过

$$\epsilon + (1-\delta)^\kappa \tag{6}$$

上面分析的思路其实就是一般 FRI 协议 soundness 分析的思路，论文中会将发生情况 1 叫做发生了一些“坏”的事件 (“bad” event) ，然后假设“坏”的事件没有发生的情况下，估计情况 2 的概率，最后再将两个结合起来进行分析。

我们知道 FRI 协议分为两个阶段，一个是 Commit 阶段，另一个是 Query 阶段。我们可以将上述两种情况与这两个阶段对应起来：

1. 上述情况 1 发生在 Commit 阶段，Verifier 会选取随机数让 Prover 对多项式进行折叠。
2. 上述情况 2 对应发生在 Query 阶段，此时 Verifier 会随机选取一些点进行 query 检查。

如果是 batched 版本的 FRI 协议，想证明多个多项式 $f_0^{(0)}, f_1^{(0)}, \ldots, f_t^{(0)}$ ，都是小于 k 次的多项式，可以先用随机数 $\{x_1, \ldots, x_t\}$ 进行聚合，得到

$$f^{(0)}(x) = f_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{t} x_i \cdot f_i^{(0)} \tag{7}$$

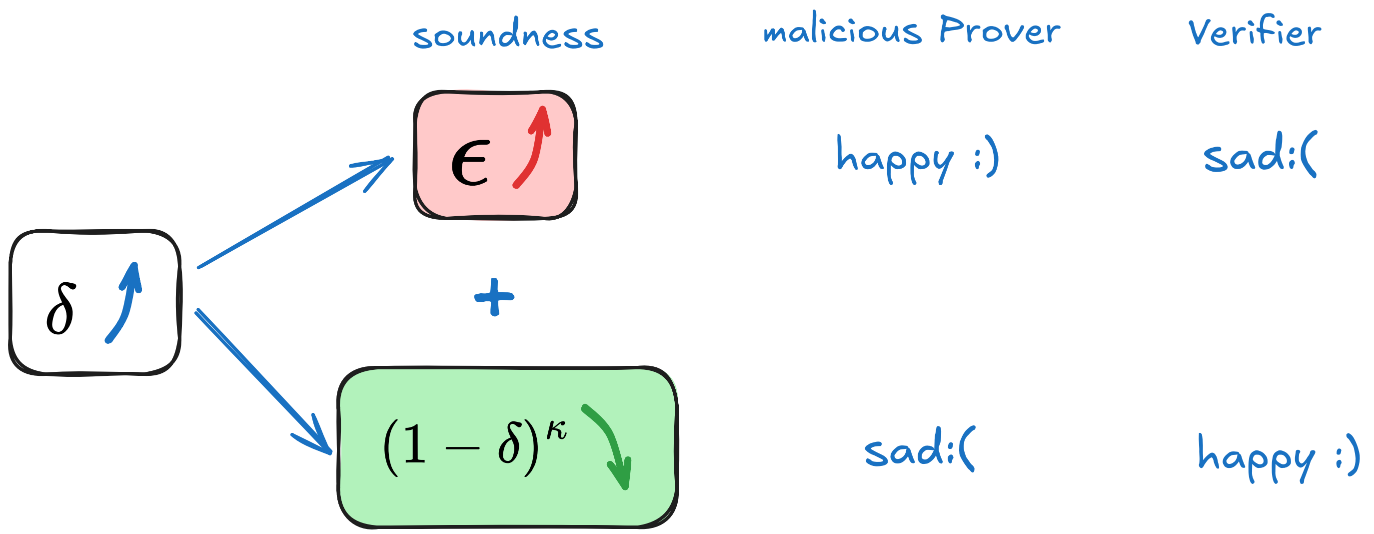
然后再对 $f^{(0)}(x)$ 应用一般的 FRI 协议，证明其是小于 k 次的多项式。这里分析 soundness 也是对应上述情况 1 ，即可能存在由于随机数的选取导致 $f^{(0)}(x)$ 距离对应的 RS 编码空间变得不再有 δ 远。

δ 增加带来的影响

下面分析下 proximity 参数 δ 的增加会带来什么影响？我们已经分析出作弊的 Prover 能成功骗过 Verifier 的概率不超过

$$\epsilon + (1-\delta)^{\kappa} \tag{8}$$

这个概率由两部分组成， δ 的增加会导致：



1. $\epsilon \uparrow$。从图形上来理解，δ 控制了每个 Hamming 球的半径，如果 δ 增大，那么 Hamming 球变大，其与 affine space A 之间的交集按理说就会更大，也就是阴影区域增大，这就意味着 ϵ 会变大。
    - 对作弊的 Prover 来说是好事 :) 。因为此时 Prover 变得比之前更加幸运了，有更大的概率进入绿色的阴影区域，能成功骗过 Verifier 了。
    - 自然，对 Verifier 来说是坏事 :(。
2. $(1-\delta)^{\kappa} \downarrow$。这个式子是直接和 δ 相关的，δ 增大，那么 $(1-\delta)^{\kappa}$ 会变小。
    - 对作弊的 Prover 来说是坏事 :(。因为此时 Prover 作弊成功的概率会变小。
    - 对 Verifier 来说是好事 :) 。 此时有更大的概率抓住 Prover 作弊。在达到相同的安全性要求下， Verifier 只需要更少的轮询次数就能达到要求了。

可以看到，δ 的增加使得 ϵ 变大， $(1-\delta)^{\kappa}$ 变小，在实际中，ϵ 是非常小的，$(1-\delta)^{\kappa}$ 在整个和式中所占比例更大，因此整体还是会变小的，这对于整个 FRI 协议来说，soundness 变小，也说明会更加安全。

上面是从 soundness 角度分析的，视频 [Proximity Gaps & Applications to Succinct Proofs]() 中还提到一点，δ 的增大会使得 Correlated Agreement 结论变得更弱， Correlated Agreement 是一个比 Proximity Gaps 更强的结论（到目前为止，还没有证明出它们等价）。下面就介绍下 Correlated Agreement 结论。

Correlated Agreement

前面提到的 affine space $A = \mathrm{span}\{u_0, u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ ，为保持和 [BCIKS20, Theorem 1.6] 结论一致，在第一个向量 u_0 前不使用随机数，设 $A = u_0 + \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_{m-1}\}$ 。

Correlated Agreement 定理 ([BCIKS20, Theorem 1.6]) 说的是如果 $\delta \in (0, 1-\sqrt{\rho})$ 并且

$$\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] > \epsilon, \tag{9}$$

其中，ϵ 就是 Proximity Gaps 结论中给出的 ϵ ，那么存在 $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ ，以及 $v_0, \ldots, v_{m-1} \in V$ 使得

1. **Density**： $\frac{|\mathcal{D}'|}{|\mathcal{D}|} \geq 1 - \delta$,
2. **Agreement**： 对任意的 $i \in \{0, \ldots, m-1\}$ ，有 $u_i|_{\mathcal{D}'} = v_i|_{\mathcal{D}'}$ 。

意思是如果落入阴影区域的元素很多，占比比 Proximity Gaps 结论中的 ϵ 还大的话，那么在 V 中存在码字 $v_0, \ldots, v_{m-1}$ ，会在区域 $\mathcal{D}$ 中存在一个占比很大(超过 $1-\delta$)的子集 $\mathcal{D}'$ ，在这里每个 u_i 都能与对应的 v_i 在 $\mathcal{D}'$ 上是一致的。根据 Proximity Gaps 的结论，A 中的元素分为以下两种情况：

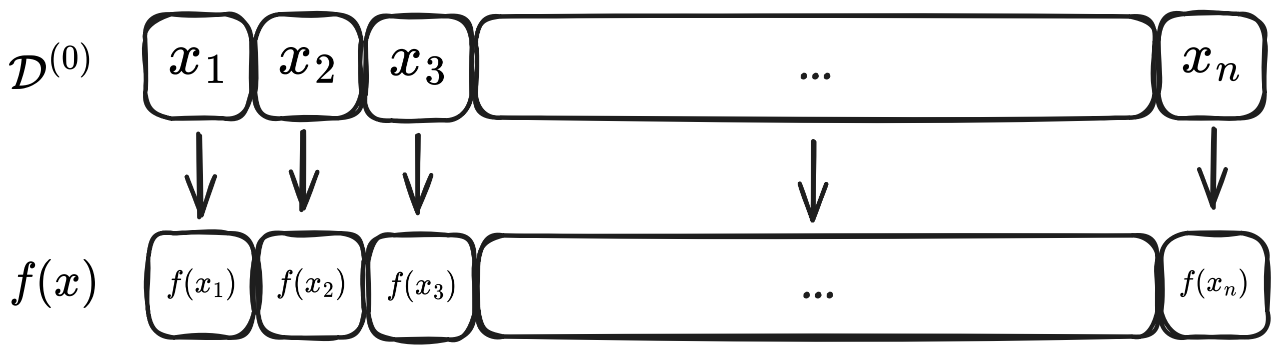
1. $\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] \leq \epsilon$
2. $\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] = 1$

现在落入阴影区域的元素占比比 ϵ 还大，那么自然排除第一种情况，得出 A 中所有的元素都落在阴影区域中，即

$$\Pr_{a \in A}[\Delta(a, V) \leq \delta] = 1.$$

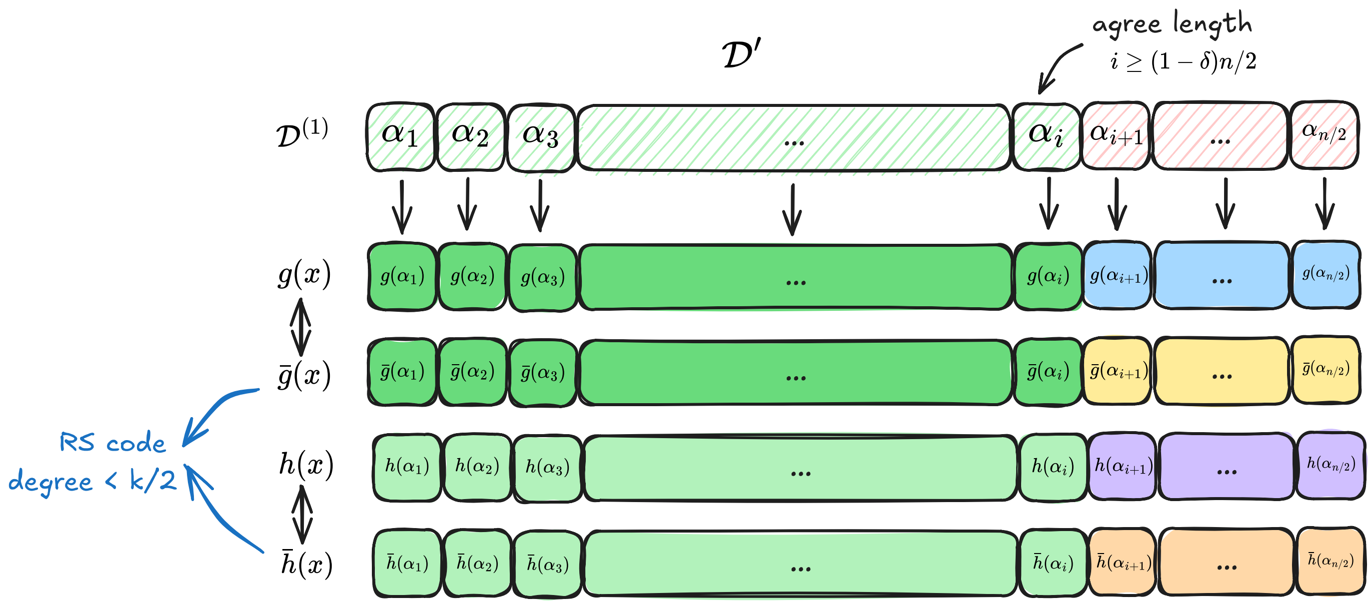
而 Correlated Agreement 定理给出了更加具体的结论，说的是在折叠之前的元素 u_i 与在编码空间 V 中找到的码字 v_i 之间的关系。

例如，Prover 想证明的是一个多项式 $f \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(0)}, k]$ ，设 $\mathcal{D}^{(0)} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ ，计算 $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ ，Prover 就会将这些值的 oracle 发送给 Verifier ，实际中会采用 Merkle 树的方式来实现 oracle。



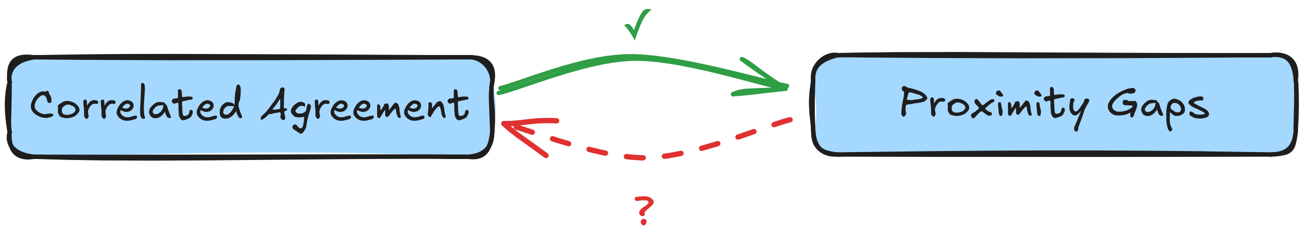
将 f 通过拆分得到两个多项式 $g(x)$ 与 $h(x)$ 。诚实的情况下 $g, h \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$ ，其中 $|\mathcal{D}^{(1)}| = |\mathcal{D}^{(0)}|/2 = n/2$ 。

Correlated Agreement 结论告诉我们，对于 $g(x)$ 与 $h(x)$ 形成的 affine space $A = \{g + z \cdot h : z \in \mathbb{F}\}$ ，如果 A 中有超过 Proximity Gaps 结论中的 ϵ 的比例的元素都落入了“阴影区域”，即满足 $\Delta(a, V) \geq \delta$ ，那么就存在如下图所示的 $\mathcal{D}'$ ，以及 $\bar{g}, \bar{h} \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}^{(1)}, k/2]$ 。不妨设 $\mathcal{D}' = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i\}$ ，那么根据结论 $|\mathcal{D}'|/|\mathcal{D}^{(1)}| \geq 1 - \delta$ ，有指标 $i \geq (1-\delta)n/2$ 。在所有的 $\mathcal{D}'$ 上，g 与 $\bar{g}$ 一致，h 与 $\bar{h}$ 一致，在图中用绿色表示，意思就是在这些 $\mathcal{D}'$ 集合中的点上求值，它们的值是一样的。



回到 δ 增大的分析，可以看到随着 δ 的增大，Correlated Agreement 结论里的第一条 **Density** 中的 $1-\delta$ 就会变小，这使得结论中能确保的存在 V 中的 v_i 与 u_i 一致的子集 $\mathcal{D}'$ 就变小了，使得得到的结论更弱了。

在 [BCIKS20] 论文中说到， Proximity Gap 定理([BCIKS20, 定理 1.2]) 就是通过 Correlated Agreement 定理([BCIKS20, 定理 1.6]) 推导得出的，但是 Proximity Gap 定理目前还不知道能否推出 Correlated Agreement 。如果 Proximity Gap 不能推出 Correlated Agreement 定理的话，说明 Correlated Agreement 定理是一个比 Proximity Gap 定理更强的结论。那如果能推出的话，说明这两个定理就等价了。



其实 Correlated Agreement 定理的版本很多，取不同的 A 就能得到不同的定理，A 可以是：

1. 线(lines)： $A=\{u_0+zu_1 : z\in\mathbb{F}\}$
2. 低次参数化曲线(low-degree parameterized curves)： $\mathrm{curve}(\mathbf{u})=\left\{u_z := \sum_{i=0}^{m-1} z^i \cdot u_i | z\in\mathbb{F}_q\right\}$
3. affine space： $u_0+\mathrm{span}\{u_1,\cdots,u_{m-1}\}$

同时，关于 Correlated Agreement 定理的条件

$$\Pr_{a\in A}[\Delta(a,V)\leq\delta]>\epsilon, \tag{10}$$

这里我们测量的是 a 与 V 之间的相对 Hamming 距离，我们还可以将这个测度变得更一般化，加上权重，给一个权重函数 $\mu:\mathcal{D}\to[0,1]$ ，定义两个向量 u 与 v 之间的相对 μ *-agreement* 为

$$\mathrm{agree}_\mu(u,v):=\frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{x:u(x)=v(x)}\mu(x) \tag{11}$$

当取 $\mu\equiv1$ 时，

$$\text{agree}_\mu(u,v) = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{x:u(x)=v(x)}\mu(x) = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{x:u(x)=v(x)} 1 = 1-\Delta(u,v) \tag{12}$$

这个测度的值就完全等于用 1 减去相对 Hamming 距离了。同样定义一个向量 u 与编码空间 V 之间的最大 agreement 为

$$\text{agree}_\mu(u,V) := \max_{v\in V}\text{agree}_\mu(u,v) \tag{13}$$

将定理中的条件变为：

$$\Pr_{a\in A}[\text{agree}_\mu \le \alpha] > \epsilon, \tag{14}$$

就会得到对应的 Weighted correlated agreement 定理(见[BCIKS20, Section 7])。可见 Correlated agreement 定理是非常灵活的。在论文[BCIKS20, Theorem 8.3]中关于 batched FRI 协议的 soundness 证明，就先定义了需要的权重函数 μ ，使用 Weighted Correlated Agreement 定理来证明，而不是用 Proximity Gap 定理来进行证明。且该定理一般都出现在反证法中，它能有力的帮我们找到编码空间的码字 v_i ，且满足定理结论中说到的性质，能够通过推导帮助我们找到矛盾。

Correlated Agreement 定理在 soundness 中的应用

这里简单描述下 Correlated Agreement 定理在 soundness 证明中的应用，没有那么严谨，实际的安全性分析会更加复杂。

前面说过 FRI 协议的 soundness 分析分为两个部分：

1. 在batch 阶段 或者 Commit 阶段，由于随机数的选择不当，使得原本距离编码空间很远的多项式，经过折叠之后距离相应的编码空间变得更近了，也就是进入了“阴影区域”。
2. 在 Query 阶段，由于随机进行检查，导致没抓住 Prover 作弊。

Correlated Agreement 定理主要就是应用在第一部分中的概率分析，会先定义“坏”的事件 $E^{(i)}$ ：折叠之前 $\Delta^*(f^{(i)},\text{RS}^{(i)}) > \delta$ ，将 $f^{(i)}$ 拆分为 $g^{(i+1)}$ 与 $h^{(i+1)}$ ，再用随机数 $r\in\mathbb{F}$ 进行折叠之后得到 $\text{fold}_r(f^{(i)})$ ，发生了

$$\Delta(\text{fold}_r(f^{(i)}),\text{RS}^{(i+1)}) \le \delta \tag{15}$$

这里用到了 Δ^* ，它的定义与 Hamming 距离有所区别，其联系了 FRI 的 Query 阶段的随机查询，这里就不详细展开了。假设发生一个“坏”的事件 $E^{(i)}$ 的概率不超过 ϵ ，即

$$\Pr[E^{(i)}] = \Pr_{r\in\mathbb{F}}[\Delta(\text{fold}_r(f^{(i)}),\text{RS}^{(i+1)}) \le \delta] \le \epsilon \tag{1}$$

如果 FRI 协议中折叠 d 次，那么发生一些“坏”的事件的概率不超过 $d\cdot\epsilon$ ，即

$$\bigcup_{i=0}^{d}\Pr[E^{(i)}] \le d\cdot\epsilon \tag{16}$$

这样就将第一部分的概率分析出来了，接着再假设没有这些“坏”的事件发生，来分析第二部分的概率，最终结合两部分概率就能得到 soundness 的结论。

现在剩下的一个关键问题是如何证明 (1) 式，即证明如果 $\Delta^*(f^{(i)},\text{RS}^{(i)}) > \delta$ ，有

$$\Pr_{r\in\mathbb{F}}[\Delta(\text{fold}_r(f^{(i)}),\text{RS}^{(i+1)}) \le \delta] \le \epsilon \tag{2}$$

思路就是用反证法，假设 (2) 式不成立，即

$$\Pr_{r \in \mathbb{F}}[\Delta(\mathrm{fold}_r(f^{(i)}), \mathrm{RS}^{(i+1)}) \leq \delta] > \epsilon \tag{17}$$

这就满足了 Correlated Agreement 定理的条件了，说明此时存在 $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}^{(i+1)}$ ，以及 $\bar{g}^{(i+1)}, \bar{h}^{(i+1)} \in \mathrm{RS}^{(i+1)}$ 满足

$$\bar{g}^{(i+1)}|_{\mathcal{D}'} = g^{(i+1)}|_{\mathcal{D}'}, \quad \bar{h}^{(i+1)}|_{\mathcal{D}'} = h^{(i+1)}|_{\mathcal{D}'} \tag{18}$$

并且 $|\mathcal{D}'| \geq (1-\delta)|\mathcal{D}^{(i+1)}|$ 。拿着这编码空间中的码字 $\bar{g}^{(i+1)}$ 与 $\bar{h}^{(i+1)}$ ，能得到一个多项式 $\bar{f}^{(i)}$ ，

$$\bar{f}^{(i)}(x) = \bar{g}^{(i+1)}(x^2) + x \cdot \bar{h}^{(i+1)}(x^2) \tag{19}$$

由于编码的线性性，那么 $\bar{f}^{(i)}$ 肯定也是一个码字，且 $\bar{f}^{(i)} \in \mathrm{RS}^{(i)}$ ，同时有

$$\bar{f}^{(i)}|_{\mathcal{D}'} = f^{(i)}|_{\mathcal{D}'} \tag{20}$$

由于 $|\mathcal{D}'| \geq (1-\delta)|\mathcal{D}^{(i+1)}|$ ，我们可以得到 $\Delta^*(f^{(i)}, \mathrm{RS}^{(i)}) \leq \Delta^*(f^{(i)}, \bar{f}^{(i)}) \leq \delta$ ，这与假设矛盾，因此 (2) 式成立。

总结

Proximity gap 在 FRI 协议中起着至关重要的作用，它能让我们放心的用随机数对多项式进行折叠，这大大减少了 Prover 发送 oracle 的数量，同时也减少了 Verifier 查询的数量。此外，Proximity gap 和 Correlated Agreement 定理密切相关，并且在 FRI 的 soundness 分析中起到了关键作用。

References

- [BCIKS20] Eli Ben-Sasson, Dan Carmon, Yuval Ishai, Swastik Kopparty, and Shubhangi Saraf. Proximity Gaps for Reed–Solomon Codes. In *Proceedings of the 61st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 900–909, 2020.
- 视频：[Proximity Gaps & Applications to Succinct Proofs]