[BCIKS20] Proximity Gaps 论文 soundness 解析

> 作者：Yu Guo(yu.guo@secbit.io) Jade Xie(jade@secbit.io)

论文 [BCIKS20] 对 [BBHR18] 中的 FRI 协议的 soundness 进行了改进，主要分析了 batched FRI 的情况。本文将详细解析 [BCIKS20] 论文中关于 batched FRI soundness 的内容。

Introduction

在交互证明，分布式存储以及密码学等背景下，出现了各种协议，这些协议引出了关于一个线性编码 $V \subset \mathbb{F}_q^n$ 的 proximity 问题，其中 $\mathbb{F}_q$ 是有限域，V 的最小的相对距离为 δ_V 。这些协议假设我们可以获得关于一批向量 $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^n$ 的 oracle，它们的 soundness 要求每个向量 u_i 在相对 Hamming 距离上接近 V 。另外，soundness 是某些向量到 code V 之间的最大距离的一个函数，如果这个距离变大，那么 Verifier 拒绝的概率会降低。因此，我们想找到这样的协议，能够最小化对 $\mathbf{u}$ 中元素的 query 的数量，同时最大化能识别某个向量 u_i 明显远离 V 的概率。

> ❓ 疑问
>
> - [ ] 如何理解下面这句话？ Furthermore, soundness deteriorates as a function of the largest distance between some vector ui and the code V . soundeness 会随着某些向量 u_i 与 code V 之间的最大距离的增加而降低，也就是此时 Verifier 拒绝的概率就降低了？
> - [ ] 如何对 soundness 降低进行清楚地讲解呢？

由于 V 的线性性，一个自然的方法([RVW13])是：在 span($\mathbf{u}$)(即 $\mathbf{u}$ 中各元素的线性组合) 中均匀地随机一个向量 u' ，记 u' 与 V 之间的距离为 $\Delta(u', V)$ ，将这个距离视为 $\mathbf{u}$ 中某些元素与 V 之间的最大距离的一个 proxy（代理）。为了证明 soundness ，我们想要即使只有一个 u_i 距离 V 中的所有元素有 δ-远，那么随机选择的 u' 也距离 V 很远。

在下文中，用 Δ 表示相对 Hamming 距离。当 $\Delta(u, v) \le \delta$ 对某个 $v \in V$ 成立时，称为 “ u 与 V 的距离有 δ -近”，记作 $\Delta(u, V) \le \delta$；否则称为 “ u 与 V 的距离有 δ -远”，记作 $\Delta(u, V) > \delta$ 。

关于这个问题，一些研究结果为：

1. [AHIV17] 如果 $\delta < \delta_V/4$ ，几乎所有的 $u' \in \text{span}(\mathbf{u})$ 距离 V 有 δ -远。
2. [RZ18] 将上述结果提高到 $\delta < \delta_V/3$ 。
3. [BKS18] 提高到 $\delta < 1 - \sqrt[4]{1 - \delta_V}$ 。
4. [BGKS20] 提高到 $\delta < 1 - \sqrt[3]{1 - \delta_V}$ ，但这个界对 RS 编码是 tight 的，因为当 $n = q$ 时可以达到这个界。

> 🤔 思考
>
> - [ ] 为什么研究的重心都想要提高这个 δ 的上界呢？关于这个问题，目前我的想法是： δ 的上界这里是和 δ_V 有关的，对于 RS code ，$\delta_V = 1 - \rho$，实质也就是和码率相关，那么提高上界也就意味着降低了码率，那么就意味着更多的冗余，如果以相同的安全性，或者同样的高概率来拒绝出错的情况，此时需要的query就更少了。或者这样说，如果对于同样一个协议，query 的数量固定，δ 越大，拒绝的概率也就越大，也就提高了 soundness。
> - [ ] 上面分析的第 2 点与 “Furthermore, soundness deteriorates as a function of the largest distance between some vector u_i and the code V .” 似乎矛盾，这句话说的是 δ 越大，soundness 越小？这一点该如何理解呢？

目前我们关心的一个问题是：对于哪些码以及什么范围的 δ ，以下的陈述成立？

如果某个 $u^* \in \text{span}(\mathbf{u})$ 与 V 有 δ -远，那么对于几乎所有的 $u' \in \text{span}(\mathbf{u})$ ，u' 与 V 也有 δ -远。

[BCIKS20] 论文的主要结论之一表明，当 V 是一个在足够大的域上的 RS 码（域的大小与码的块长度呈多项式关系）并且 δ 小于 Johnson/Guruswami-Sudan list decoding 界时，上述陈述成立。接下来，我们称其为 proximity gap 。

Proximity Gaps

先给出 Proximity Gaps 的定义。

Definition 1.1 [BCIKS20, Definition 1.1] (Proximity gap). Let $P \subset \Sigma^n$ be a property and $C \subset 2^{\Sigma^n}$ be a collection of sets. Let Δ be a distance measure on Σ^n . We say that C displays a (δ, ϵ) -proximity gap with respect to P under Δ if every $S \in C$ satisfies exactly one of the following:

1. $\Pr_{s \in S}[\Delta(s, P) \le \delta] = 1$.

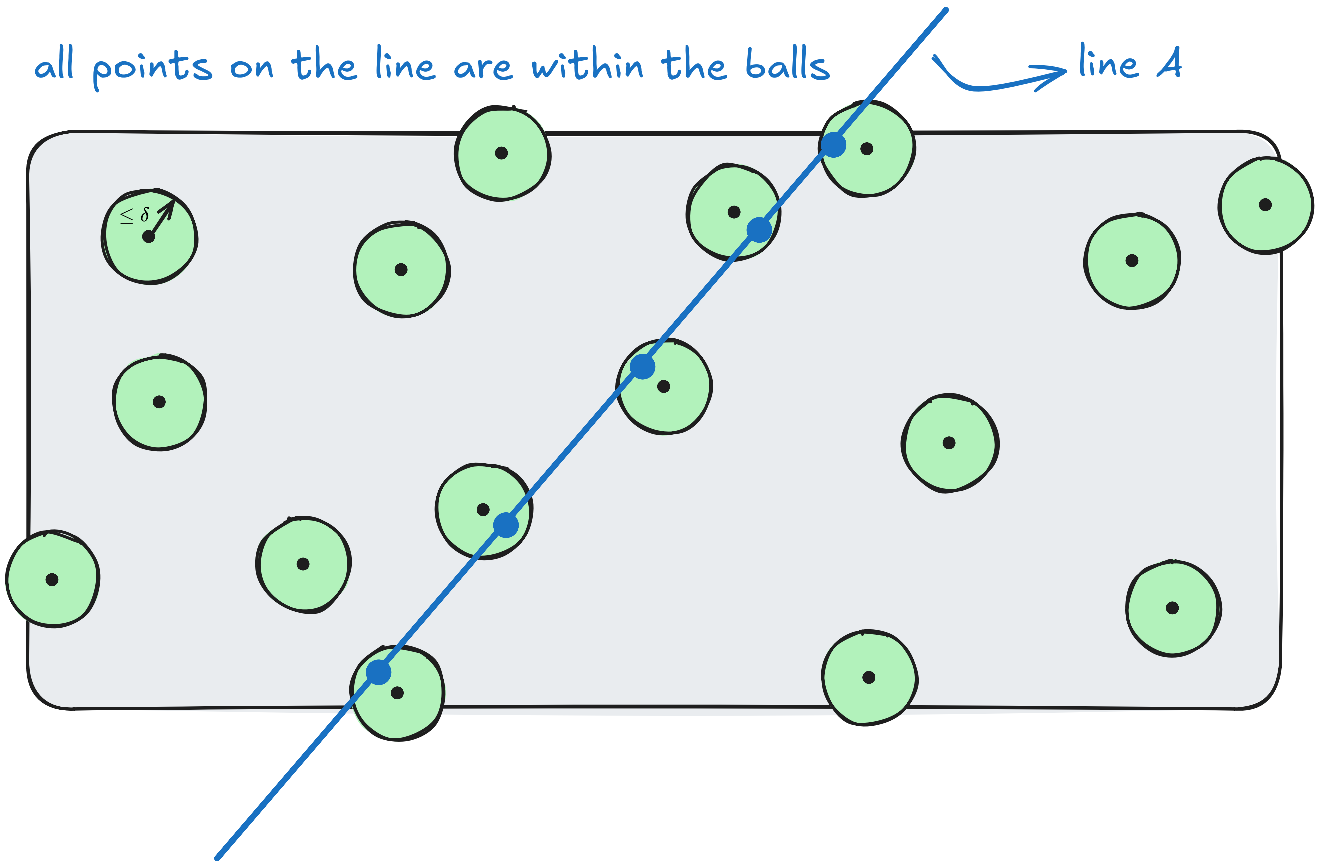
2. $\Pr_{s \in S}[\Delta(s, P) \leq \delta] \leq \epsilon$.

We call δ the proximity parameter and ϵ is the error parameter. By default, Δ denotes the relative Hamming distance measure.

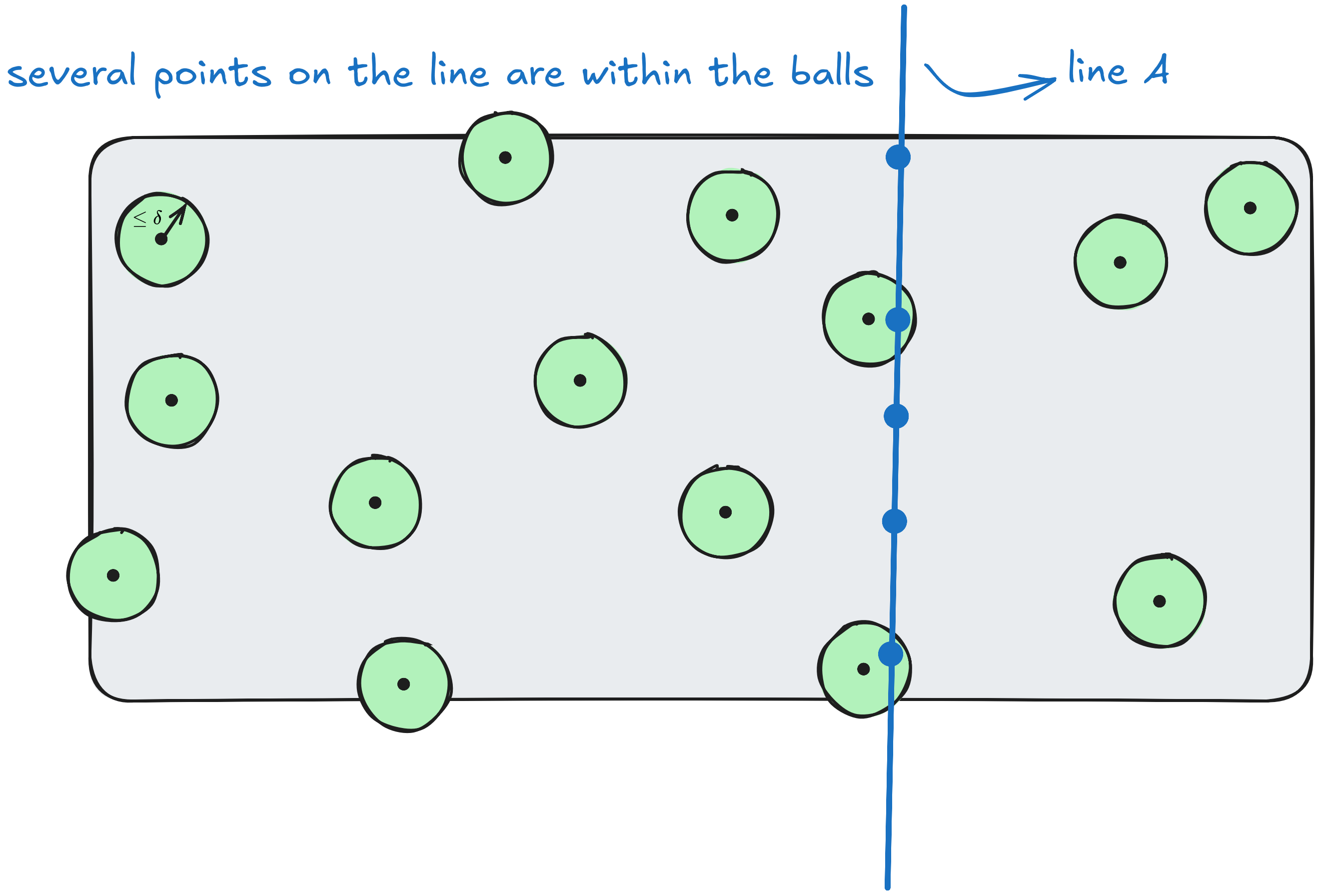
对于 RS code，如果 $V \subset \mathbb{F}^n$ 是 RS 编码，对应上述定义中的 P，并且 $A \subset \mathbb{F}^n$ 是一个 affine space (仿射空间)，对应于上述定义中的 S，那么要么 A 中的所有元素离 V 有 δ -近，要么 A 中的几乎所有元素离 V 有 δ -远。换句话说，不会有这样的 affine space A，其中大概一半的元素离 V 比较近，但同时另一半元素离 V 比较远。

如下图所示，A 是一个 affine space，这里用一条线表示，编码空间 V 中的元素用黑色的点表示，以这些点为圆心，以 δ 为半径画圆。那么只有两种情况：

1. 线 A 上的所有元素都落入了绿色的圆形区域内。



2. 线上只有少量的元素落入了绿色的圆形区域内。



A 中的元素不可能一半在圆形区域内，一半在圆形区域外，这也是 gap 的含义，将 A 中的所有元素落入的情况分成了恰好分成了两种情况，而这两种情况之间根据相对 Hamming 距离形成了一个巨大的 gap 。

在下文中，用 $\mathbb{F}_q$ 表示大小为 q 的有限域，$\mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}, k]$ 表示维数为 $k+1$，块长度(blocklength) 为 $n = |\mathcal{D}|$ 的 RS 编码，其码字是在 $\mathcal{D}$ 上求值(evaluated)，次数 $\le k$ 的多项式。用 ρ 表示码率， 则 $\rho = \frac{k+1}{n}$ 。δ 表示相对于 RS code 的相对 Hamming 距离，ϵ 表示 error 参数，也就是一个"坏事件(bad event)"发生的概率。

下面给出 RS code 的 Proximity gaps 定理。

Theorem 1.2 [BCIKS20, Theorem 1.2] (Proximity gap for RS codes). The collection C_{Affine} of affine spaces in $\mathbb{F}_q^n$ displays a (δ, ϵ) - proximity gap with respect to the RS code $V := \mathrm{RS}[\mathbb{F}_q, \mathcal{D}, k]$ of blocklength n and rate $\rho = \frac{k+1}{n}$, for any $\delta \in (0, 1-\sqrt{\rho})$, and $\epsilon = \epsilon(q, n, \rho, \delta)$ defined as the following piecewise function:

- Unique decoding bound: For $\delta \in [0, \frac{1-\rho}{2})$, the error parameter ϵ is

$$\epsilon = \epsilon_{\mathrm{U}} = \epsilon_{\mathrm{U}}(q, n) := \frac{n}{q} \tag{1.1}$$

- List decoding bound: For $\delta \in (\frac{1-\rho}{2}, 1-\sqrt{\rho})$, setting $\eta := 1 - \sqrt{\rho} - \delta$, the error parameter ϵ is

$$\epsilon = \epsilon_{\mathrm{J}} = \epsilon_{\mathrm{J}}(q, n, \rho, \delta) := \frac{(k+1)^2}{\left(2 \min\left(\eta, \frac{\sqrt{\rho}}{20}\right)^7\right) q} = O\left(\frac{1}{(\eta\rho)^{O(1)}} \cdot \frac{n^2}{q}\right) \tag{1.2}$$

> 🤔 **Question**
>
> - [ ] δ 越大，落入圆形区域的元素可能更多，也就是 ϵ_{J} 相比 ϵ_{U} 更大一些。是这个原因吗?

Correlated agreements

论文中证明的主要定理是 correlated agreement ，对于在 $\mathbb{F}^{\mathcal{D}}$ 中的两个向量 $u_0, u_1 \in \mathbb{F}^{\mathcal{D}}$ ，在 $\mathbb{F}$ 中选一个随机数 z ，我们关心用 z 进行线性组合后的 $u_0 + z u_1$ 所形成的空间与 V 之间的距离，也就是一维的 affine space $A = \{u_0 + z u_1 : z \in \mathbb{F}\}$ 。correlated agreement 结论说的是如果在 A 中有足够多的元素距离 RS code 空间 V 足够近（δ - 近），那么一定存在一个非平凡的 subdomain $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$，其大小至少是 $\mathcal{D}$ 大小的 $1-\delta$ 倍，使得限制 u_0, u_1 在 $\mathcal{D}'$ 上，有有效的 RS code v_0, v_1 ，满足它们分别在 $\mathcal{D}'$ 上与 u_0, u_1 一致。我们就说这

样的 $\mathcal{D}'$ 有 correlated agreement 性质，即 u_0, u_1 和 A 中的元素不仅分别与 RS 码有很大的 agreement，而且还共享一个共同的很大的 agreement 集合。这个结果有两个参数范围，一个是 unique decoding 范围内的 proximity 参数，另一个是 list decoding 范围内的 proximity 参数。

以下给出了三种情况的 correlated agreement。结合论文中其他关于 correlated agreement 的结论，如下表所示。

	空间 U	$\Delta_u(u,V)$	$\Delta_u(u,V)$ **unique decoding**	$\Delta_u(u,V)$ **list decoding**	$\mathrm{agree}_\mu(u,V)$
lines	$\{u_0 + zu_1 : z \in \mathbb{F}\}$	Theorem 1.4	Theorem 4.1	Theorem 5.1 & Theorem 5.2	
low-degree parameterized curves	$\mathrm{curve}(\mathbf{u}) = \left\{u_z := \sum_{i=0}^{l} z^i \cdot u_i \| z \in \mathbb{F}_q\right\}$	Theorem 1.5	Theorem 6.1	Theorem 6.2	Theorem 7.1 & Theorem 7.2(Johnson bound 更精确版本)
affine spaces	$u_0 + \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_l\}$	Theorem 1.6			Theorem 7.3 & Theorem 7.4(Johnson bound 更精确版本)

下面三个定理分别对应线、低次参数曲线以及 affine spaces 的 correlated agreement 定理。

Theorem 1.4 [BSCIK20, Theorem 1.4] (Main Theorem - Correlated agreement over lines). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. For $u_0, u_1 \in \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$, if $\delta \in (0, 1-\sqrt{\rho})$ and

$$\Pr_{z \in \mathbb{F}_q}[\Delta(u_0 + z \cdot u_1, V) \le \delta] > \epsilon, \tag{1}$$

where ϵ is as defined in Theorem 1.2, then there exist $D' \subset D$ and $v_0, v_1 \in V$ satisfying

- **Density**: $|D'|/|D| \ge 1 - \delta$, and
- **Agreement**: v_0 agrees with u_0 and v_1 agrees with u_1 on all of D'.

令 $\mathbf{u} = \{u_0, \ldots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$，则次数为 l 的 parameterized curve 是由 $\mathbf{u}$ 生成的如下的在 $\mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ 中的向量的集合，

$$\mathrm{curve}(\mathbf{u}) := \left\{ u_z := \sum_{i=0}^{l} z^i \cdot u_i \middle| z \in \mathbb{F}_q \right\} \tag{2}$$

Theorem 1.5 [BSCIK20, Theorem 1.5] (Correlated agreement for low-degree parameterized curves). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$. If $\delta \in (0, 1-\sqrt{\rho})$ and

$$\Pr_{u \in \mathrm{curve}(u)}[\Delta(\mathbf{u}, V) \le \delta] > l \cdot \epsilon, \tag{3}$$

where ϵ is as defined in Theorem 1.2, then there exist $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ and $v_0, \cdots, v_l \in V$ satisfying

- **Density**: $|\mathcal{D}'|/|\mathcal{D}| \ge 1 - \delta$, and
- **Agreement**: for all $i \in \{0, \cdots, l\}$, the functions u_i and v_i agree on all of $\mathcal{D}'$.

Theorem 1.6 [BSCIK20, Theorem 1.6] (Correlated agreement over affine spaces). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. For $u_0, u_1, \cdots, u_l \in \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ let $U = u_0 + \mathrm{span}\{u_1, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ be an affine subspace. If $\delta \in (0, 1-\sqrt{\rho})$ and

$$\Pr_{u \in U}[\Delta(u, V) \le \delta] > \epsilon, \tag{4}$$

where ϵ is as defined in Theorem 1.2, then there exist $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ and $v_0, \cdots, v_l \in V$ satisfying

- **Density**: $|\mathcal{D}'|/|\mathcal{D}| \ge 1 - \delta$, and
- **Agreement**: for all $i \in \{0, \cdots, l\}$, the functions u_i and v_i agree on all of $\mathcal{D}'$.

Furthermore, in the unique decoding regime $\delta \in \left(0, \frac{1-\rho}{2}\right]$, there exists a unique maximal $\mathcal{D}'$ satisfying the above, with unique v_i.

Correlated Weighted Agreement

如果要分析 FRI 协议的 soundness，就需要 Theorem 1.5 的 weighted 版本。

对于一个给定的 weight 向量 $\mu : \mathcal{D} \to [0, 1]$，$u, v$ 之间(相对的) μ -agreement 定义为

$$\mathrm{agree}_\mu(u, v) := \frac{1}{|\mathcal{D}|} \sum_{x : u(x) = v(x)} \mu(x). \tag{5}$$

也就是在权重 μ 之下看 u 与 v 在 $\mathcal{D}$ 上一致的比例有多少。如果令 $\mu \equiv 1$ ，那么

$$\text{agree}_\mu(u,v) = \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{x:u(x)=v(x)} 1 = 1 - \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{x:u(x)\neq v(x)} 1 = 1 - \Delta(u,v). \tag{6}$$

一个 word u 与一个线性码 V 之间的 agreement 为 u 与 V 之间的一个码字之间的最大的 agreement，

$$\text{agree}_\mu(u,V) := \max_{v\in V} \text{agree}_\mu(u,v). \tag{7}$$

定义 subdomain $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ 的加权(weighted) 大小为

$$\mu(\mathcal{D}') := \frac{1}{|\mathcal{D}|}\sum_{x\in\mathcal{D}'} \mu(x). \tag{8}$$

将上面定义中的 $\mathcal{D}'$ 定义为 $\{x \in \mathcal{D} : u(x) = v(x)\}$ ，则 agreement 满足 $\text{agree}_\mu(u,v) = \mu(\{x\in\mathcal{D} : u(x) = v(x)\})$ 。

最后，对于 $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\}$ ，其中 $u_i \in \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ 是一组 word， μ -weighted correlated agreement 是 subdomain $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ 的最大 μ -weighted 大小，使得 $\mathbf{u}$ 在 $\mathcal{D}'$ 上的限制属于 $V|_{\mathcal{D}'}$ ，即对于每个 $i = 0, \cdots, l$ ，存在 $v_i \in V$ 使得 $u_i|_{\mathcal{D}'} = v_i|_{\mathcal{D}'}$ 。当 μ 未指定时，它被设置为常数权重函数 1 ，这恢复了在前面讨论的 correlated agreement 度量的概念。

接下来，我们假设权重函数 μ 具有某些结构，具体来说，所有权重 $\mu(x)$ 都是形式 $\mu(x) = \frac{a_x}{M}$ ，其中 a_x 是变化的整数，且有共同的分母 M 。对于 FRI soundness 的特殊情况（其中 M 等于应用 FRI 协议的 RS 码的 blocklength），这个假设确实成立。以下是定理 1.5 的加权推广。

Theorem 7.1 [BSCIK20, Theorem 7.1] (Weighted correlated agreement over curves – Version I). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$. Let $\alpha \in (\sqrt{\rho}, 1)$ and let $\mu : \mathcal{D} \to [0,1]$ be a vector of weights, whose values all have denominator M . Suppose

$$\Pr_{u\in\text{curve}(\mathbf{u})}[\text{agree}_\mu(u,V) \geq \alpha] > l\cdot\epsilon, \tag{9}$$

where ϵ is as defined in Theorem 1.2 (with $\eta = \min(\alpha - \sqrt{\rho}, \frac{\sqrt{\rho}}{20})$), and additionally suppose

$$\Pr_{u\in\text{curve}(\mathbf{u})}[\text{agree}_\mu(u,V) \geq \alpha] \geq \frac{l(M|\mathcal{D}|+1)}{q}\left(\frac{1}{\eta} + \frac{3}{\sqrt{\rho}}\right). \tag{10}$$

Then there exists $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$ and $v_0, \cdots, v_l \in V$ satisfying

- **Density**: $\mu(\mathcal{D}') \geq \alpha$, and
- **Agreement**: for all $i \in \{0, \cdots, l\}$, the functions u_i and v_i agree on all of $\mathcal{D}'$.

仅适用于 Johnson 界限范围的一种更精确的形式如下。

Theorem 7.2 [BSCIK20, Theorem 7.2] (Weighted correlated agreement over curves – Version II). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$. Let $\mu : \mathcal{D} \to [0,1]$ be a vector of weights, whose values all have denominator M . Let $m \geq 3$ and let

$$\alpha \geq \alpha_0(\rho, m) := \sqrt{\rho} + \frac{\rho}{2m}. \tag{11}$$

Let

$$S = \{z \in \mathbb{F}_q : \text{agree}_\mu(u_0 + zu_1 + \cdots + z^l u_l, V) \geq \alpha\} \tag{12}$$

and suppose

$$|S| > \max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}} n^2 l, \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}(M\cdot n + 1)l\right). \tag{7.1}$$

Then $u_0, \ldots, u_l$ have at least α correlated μ -agreement with V , i.e. $\exists v_0, \cdots, v_l \in V$ such that

$$\mu(\{x \in \mathcal{D} : \forall 0 \leq i \leq l, u_i(x) = v_i(x)\}) \geq \alpha. \tag{13}$$

Theorem 7.3 [BSCIK20, Theorem 7.3] (Weighted correlated agreement over affine spaces). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ and let $U = u_0 + \text{span}\{u_1, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ be an affine subspace. Let $\alpha \in (\sqrt{\rho}, 1)$ and let $\mu : \mathcal{D} \to [0,1]$ be a vector of weights, whose values all have denominator M . Suppose

$$\Pr_{u\in U}[\text{agree}_\mu(u,V)\geq\alpha]>\epsilon, \tag{14}$$

where ϵ is as defined in Theorem 1.2 (with $\eta=\min(\alpha-\sqrt{\rho},\frac{\sqrt{\rho}}{20})$), and additionally suppose

$$\Pr_{u\in U}[\text{agree}_\mu(u,V)\geq\alpha]\geq\frac{M|\mathcal{D}|+1}{q}\left(\frac{1}{\eta}+\frac{3}{\sqrt{\rho}}\right). \tag{15}$$

Then there exist $\mathcal{D}'\subset\mathcal{D}$ and $v_0,\cdots,v_l\in V$ satisfying

- **μ-Density**: $\mu(\mathcal{D}')\geq\alpha$, and
- **Agreement**: for all $i\in\{0,\cdots,l\}$, the functions u_i and v_i agree on all of $\mathcal{D}'$.

同样地，对于 Theorem 7.3 也有关于 Johnson 界限的更精确的形式。

Theorem 7.4 [BSCIK20, Theorem 7.4] (Weighted correlated agreement over affine spaces – Version II). Let V,q,n,k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u}=\{u_0,\cdots,u_l\}\subset\mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ and let $U=u_0+\text{span}\{u_1,\cdots,u_l\}\subset\mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ be an affine subspace. Let $\mu:\mathcal{D}\to[0,1]$ be a vector of weights, whose values all have denominator M . Let $m\geq3$ and let

$$\alpha\geq\alpha_0(\rho,m):=\sqrt{\rho}+\frac{\sqrt{\rho}}{2m}. \tag{16}$$

Suppose

$$\Pr_{u\in U}[\text{agree}_\mu(u,V)\geq\alpha]>\max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7m^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q},\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{M\cdot n+1}{q}\right). \tag{7.2}$$

Then $u_0,\ldots,u_l$ have at least α correlated μ -agreement with V , i.e. $\exists v_0,\cdots,v_l\in V$ such that

$$\mu\left(\{x\in\mathcal{D}:\forall 0\leq i\leq l,u_i(x)=v_i(x)\}\right)\geq\alpha. \tag{17}$$

FRI 协议

FRI 协议的目的是为了在 IOP 模型中，去解决 Reed-Solomon proximity testing 问题，即对于一个接收到的 word $f^{(0)}:\mathcal{D}^{(0)}\to\mathbb{F}$ ，验证它到 $V^{(0)}:=\text{RS}[\mathbb{F},\mathcal{D}^{(0)},k^{(0)}]$ 之间的 proximity ，如果 $f^{(0)}$ 属于 $V^{(0)}$ ，就接受；如果距离 $V^{(0)}$ 有 δ 远，就拒绝。FRI 协议适用于任何 evaluation domain $\mathcal{D}^{(0)}$ 是 *2-smooth 群* 的陪集的情况，即对于任何的 $\mathcal{D}^{(0)}$ ，其是一个大小为 2^s 的（加法或乘法）群的陪集，其中 s 是一个整数。因此，为简化描述，假设群 $\mathcal{D}^{(0)}$ 是乘法的。FRI 协议有两个阶段，分别是 COMMIT 阶段与 QUERY 阶段。

在 COMMIT 阶段，经过有限次 r 轮的交互，会生成一系列的函数 $f^{(1)}:\mathcal{D}^{(1)}\to\mathbb{F},f^{(2)}:\mathcal{D}^{(2)}\to\mathbb{F},\cdots,f^{(r)}:\mathcal{D}^{(r)}\to\mathbb{F}$ 。每一次迭代， domain 的大小 $|\mathcal{D}^{(i)}|$ 都会缩小。假设对于一个诚实的 prover， $f^{(0)}$ 是 low-degree ，那么对于每一个 $f^{(i)}$ ，它们也都会是 low-degree 的（见命题 1）。在第 i-轮开始时，prover 的消息 $f^{(i)}:\mathcal{D}^{(i)}\to\mathbb{F}$ 已经生成，并且 verifier 可以访问该消息的 oracle 。Verifier 现在发送一个均匀随机的 $z^{(i)}\in\mathbb{F}$ ，然后 prover 回复一个新的函数 $f^{(i+1)}:\mathcal{D}^{(i+1)}\to\mathbb{F}$ ，其中 $\mathcal{D}^{(i+1)}$ 是 $\mathcal{D}^{(i)}$ 的一个（2-smooth） strict 子群，意思是 $\mathcal{D}^{(i)}$ 不仅是 $\mathcal{D}^{(i+1)}$ 的子群，同时也是其真子集。

$\mathcal{D}^{(i+1)}$ 将 $\mathcal{D}^{(i)}$ 划分成大小为 $l^{(i)}:=|\mathcal{D}^{(i)}|/|\mathcal{D}^{(i+1)}|$ 的陪集。令 $C_g^{(i)}$ 表示对应于 $g\in\mathcal{D}^{(i+1)}$ 的陪集，即

$$C_g^{(i)}:=\{g'\in\mathcal{D}^{(i)}\mid(g')^{l^{(i)}}=g\}. \tag{8.1}$$

意思就是在 $\mathcal{D}^{(i)}$ 中选取那些能够通过映射 $q(x)=x^{l^{(i)}}$ 映射到 $\mathcal{D}^{(i+1)}$ 中的 g 的元素，这些元素组成了集合 $C_g^{(i)}$ ，其也是陪集。

对于每个陪集 $C_g^{(i)}$ ，*插值映射(interpolation map)* $M_g^{(i)}$ 是一个可逆的线性映射 $M_g^{(i)}:\mathbb{F}^{C_g^{(i)}}\to\mathbb{F}^{l^{(i)}}$ ，它将 $f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}:C_g^{(i)}\to\mathbb{F}$ （即限制 $f^{(i)}$ 在 domain $C_g^{(i)}\subset\mathcal{D}^{(i)}$ 上）映射到多项式 $P_{\mathbf{u}^{(i)}(g)}^{(i)}(Z)=\sum_{j<l^{(i)}}u_j^{(i)}(g)Z^j$ 的系数向量 $\mathbf{u}^{(i)}(g)=(u_0^{(i)}(g),\ldots,u_{l^{(i)}-1}^{(i)}(g))^\intercal$ （这里与论文原文表示一致，都表示列向量，不过原文没有加上转置符号），其中 $P_{\mathbf{u}^{(i)}(g)}^{(i)}(Z)$ 是插值 $f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}$ 的多项式。换句话说，$M_g^{(i)}$ 是由 $C_g^{(i)}$ 生成的 Vandermonde 矩阵的逆，这意味着 $\left(M_g^{(i)}\right)^{-1}\cdot(u_0,\ldots,u_{l^{(i)}-1})^\intercal$ 是多项式 $P_{\mathbf{u}}(X)=\sum_{i<l^{(i)}}u_iX^i$ 在陪集 $C_g^{(i)}$ 上的 evaluation 。

> 👀 **Notice** 本文为保持前后一致，用 $(x_0,\ldots,x_n)$表示行向量，而 $(x_0,\ldots,x_n)^\intercal$ 表示列向量，也可写为：
>
> $$\begin{bmatrix}x_0\\x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} \tag{18}$$

下面详细解释下上面对插值映射的描述。根据 $C_g^{(i)}$ 的定义，知道其中的元素有 $l^{(i)}$ 个，设 $C_g^{(i)}=\{g_1',\cdots,g_{l^{(i)}}'\}$ ，我们可以将由 $C_g^{(i)}$ 生成的 Vandermonde 矩阵写出来：

$$V_{C_g^{(i)}}=\begin{bmatrix}1 & g_1' & (g_1')^2 & \cdots & (g_1')^{l^{(i)}-1}\\ 1 & g_2' & (g_2')^2 & \cdots & (g_2')^{l^{(i)}-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & g_{l^{(i)}}' & (g_{l^{(i)}}')^2 & \cdots & (g_{l^{(i)}}')^{l^{(i)}-1}\end{bmatrix} \tag{19}$$

则 $M_g^{(i)}=V_{C_g^{(i)}}^{-1}$ ，是由 $C_g^{(i)}$ 生成的 Vandermonde 矩阵的逆，因此

$$\begin{aligned}\left(M_g^{(i)}\right)^{-1}\cdot(u_0,\ldots,u_{l^{(i)}-1})^\intercal &= \left(V_{C_g^{(i)}}^{-1}\right)^{-1}\cdot(u_0,\ldots,u_{l^{(i)}-1})^\intercal\\ &= V_{C_g^{(i)}}\cdot(u_0,\ldots,u_{l^{(i)}-1})^\intercal\\ &= \begin{bmatrix}1 & g_1' & (g_1')^2 & \cdots & (g_1')^{l^{(i)}-1}\\ 1 & g_2' & (g_2')^2 & \cdots & (g_2')^{l^{(i)}-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & g_{l^{(i)}}' & (g_{l^{(i)}}')^2 & \cdots & (g_{l^{(i)}}')^{l^{(i)}-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_0\\ u_1\\ \vdots\\ u_{l^{(i)}-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}u_0+u_1g_1'+u_2(g_1')^2+\cdots+u_{l^{(i)}-1}(g_1')^{l^{(i)}-1}\\ u_0+u_1g_2'+u_2(g_2')^2+\cdots+u_{l^{(i)}-1}(g_2')^{l^{(i)}-1}\\ \vdots\\ u_0+u_1g_{l^{(i)}}'+u_2(g_{l^{(i)}}')^2+\cdots+u_{l^{(i)}-1}(g_{l^{(i)}}')^{l^{(i)}-1}\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}P_{\mathbf{u}}(g_1')\\ P_{\mathbf{u}}(g_2')\\ \vdots\\ P_{\mathbf{u}}(g_{l^{(i)}}')\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{20}$$

通过上述推导看出 $\left(P_{\mathbf{u}}(g_1'),P_{\mathbf{u}}(g_2')\cdots,P_{\mathbf{u}}(g_{l^{(i)}}')\right)^\intercal$ 是多项式 $P_{\mathbf{u}}(X)=\sum_{i<l^{(i)}}u_iX^i$ 在陪集 $C_g^{(i)}$ 上的 evaluation ，因此 $\left(M_g^{(i)}\right)^{-1}\cdot(u_0,\ldots,u_{l^{(i)}-1})^\intercal$ 是多项式 $P_{\mathbf{u}}(X)=\sum_{i<l^{(i)}}u_iX^i$ 在陪集 $C_g^{(i)}$ 上的 evaluation 。

下面的命题使用了上述的符号，重新叙述了 [BBHR18, Section 4.1]，与 [BBHR18, Section 4.1] 不同的是，是在乘法群而不是加法群上进行的。该命题描述的就是保持 low-degree 的性质。

Claim 1 [BCIKS20, Claim 8.1]. Suppose that $f^{(i)}\in\mathrm{RS}[\mathbb{F},\mathcal{D}^{(i)},k^{(i)}]$ where $k^{(i)}+1$ is an integral power of 2 . Then, for any $z^{(i)}\in\mathbb{F}$, letting $\mathbf{z}^{(i)}=\left(\left(z^{(i)}\right)^0,\left(z^{(i)}\right)^1,\ldots,\left(z^{(i)}\right)^{l^{(i)}-1}\right)^\intercal$, the function $f_{f^{(i)},z^{(i)}}^{(i+1)}:\mathcal{D}^{(i+1)}\to\mathbb{F}$ defined on $g\in\mathcal{D}^{(i+1)}$ by

$$f_{f^{(i)},z^{(i)}}^{(i+1)}(g):=\left(\mathbf{z}^{(i)}\right)^\intercal\cdot\mathbf{u}^{(i)}(g)=\left(\mathbf{z}^{(i)}\right)^\intercal\cdot M_g^{(i)}\cdot f^{(i)}|_{C_g^{(i)}} \tag{2}$$

is a valid codeword of $V^{(i+1)}:=\mathrm{RS}[\mathbb{F},\mathcal{D}^{(i+1)},k^{(i+1)}]$ where $k^{(i+1)}:=\frac{k^{(i)}+1}{l^{(i)}}-1$.

根据 [BBHR18] 以及上面的记号，在 FRI 协议的 COMMIT 阶段，固定一个 $g\in\mathcal{D}^{(i+1)}$ ，下一步构造的 $f_{f^{(i)},z^{(i)}}^{(i+1)}(g):=P_{\mathbf{u}^{(i)}(g)}^{(i)}(z^{(i)})$ ，下面理解下上述构造的式子。

$$\begin{aligned}
f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}(g) &= P^{(i)}_{\mathbf{u}^{(i)}(g)}(z^{(i)}) \\
&= \sum_{j<l^{(i)}} u_j^{(i)}(g)\cdot(z^{(i)})^j \\
&= \left(z^{(i)}\right)^0\cdot u_0^{(i)}(g) + \left(z^{(i)}\right)^1\cdot u_1^{(i)}(g) + \cdots + \left(z^{(i)}\right)^{l^{(i)}-1}\cdot u_{l^{(i)}-1}^{(i)}(g) \\
&= \left[\left(z^{(i)}\right)^0 \quad \left(z^{(i)}\right)^1 \quad \cdots \quad \left(z^{(i)}\right)^{l^{(i)}-1}\right]\cdot\begin{bmatrix} u_0^{(i)}(g) \\ u_1^{(i)}(g) \\ \vdots \\ u_{l^{(i)}-1}^{(i)}(g)\end{bmatrix} \\
&= \left(\mathbf{z}^{(i)}\right)^\intercal\cdot\mathbf{u}^{(i)}(g)
\end{aligned} \tag{21}$$

下面说明下命题 1 给的第二个等式，即 $\mathbf{u}^{(i)}(g) = M_g^{(i)}\cdot f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}$ 。根据前面的分析，对于由 $C_g^{(i)}$ 生成的 Vandermonde 矩阵有

$$V_{C_g^{(i)}}\cdot\begin{bmatrix} u_0^{(i)} \\ u_1^{(i)} \\ \vdots \\ u_{l^{(i)}-1}^{(i)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{\mathbf{u}}(g_1') \\ P_{\mathbf{u}}(g_2') \\ \vdots \\ P_{\mathbf{u}}(g_{l^{(i)}}')\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}(g_1') \\ f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}(g_2') \\ \vdots \\ f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}(g_{l^{(i)}}')\end{bmatrix} \tag{22}$$

因此

$$\begin{bmatrix} u_0^{(i)} \\ u_1^{(i)} \\ \vdots \\ u_{l^{(i)}-1}^{(i)}\end{bmatrix} = \left(V_{C_g^{(i)}}\right)^{-1}\cdot\begin{bmatrix} f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}(g_1') \\ f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}(g_2') \\ \vdots \\ f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}(g_{l^{(i)}}')\end{bmatrix} = M_g^{(i)}\cdot f^{(i)}|_{C_g^{(i)}} \tag{23}$$

由此得到了 $\left(\mathbf{u}^{(i)}(g)\right)^\intercal = M_g^{(i)}\cdot f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}$ 。

Batching

在某些情况下，第一个 prover 的 oracle $f^{(0)}$ 是从一个仿射空间 $F\subset\mathbb{F}^{\mathcal{D}^{(0)}}$ 的函数中采样的，这个仿射空间作为我们的输入，

$$F = \left\{ f_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{t} x_i\cdot f_i^{(0)} \mid x_i\in\mathbb{F}, f_i:\mathcal{D}^{(0)}\to\mathbb{F}\right\} \tag{3}$$

当使用 FRI 协议来 "batch" 多个不同的 low degree testing 问题实例时，我们就通过随机线性组合将它们全部组合在一起，即上式中的 $f_0^{(0)} + x_1 f_1^{(0)} + \cdots + x_t f_t^{(0)}$ 。在这种 batching 设置中，我们假设 prover 已经承诺了 $f_1^{(0)},\ldots,f_t^{(0)}$ （注意在这种情况下我们设 $f_0^{(0)} = 0$ ），并且 batched FRI 的 verifier 从 $\mathbb{F}$ 中均匀随机地采样 $x_1,\ldots,x_t\in\mathbb{F}$， prover 答复 $f^{(0)}$ ，其应该等于 $f_0^{(0)} + \sum_{i=1}^t x_i\cdot f_i^{(0)}$ ，现在 FRI 协议就应用于 $f^{(0)}$ 了。相应地，batched FRI 的 QUERY 阶段也被扩展了，因此每次请求 $f^{(0)}(g)$ 的查询时，验证者同时也查询了 $f_0^{(0)}(g),\ldots,f_t^{(0)}(g)$ 并验证 $f^{(0)}(g) = f_0^{(0)}(g) + \sum_{i=1}^t x_i\cdot f_i^{(0)}(g)$。

> 🐞 **Fix**
>
> - [ ] 论文这里的公式为 $f^{(0)}(g) = f_0^{(0)}(g) + \sum_{i=1}^t f_i^{(0)}(g)$ ，我认为这里少了前面的系数 x_i ，应该为 $f^{(0)}(g) = f_0^{(0)}(g) + \sum_{i=1}^t x_i\cdot f_i^{(0)}(g)$ 。

The (batched) FRI QUERY phase

命题 1 表明对于诚实的 prover ，verifier 选取任意的值 $z^{(i)}$ ，对于每一个 $y\in D^{(i+1)}$ ，prover 都可以通过计算 (2) 式，从一个码字 $f^{(i)}\in V^{(i)}$ 构建一个新的码字 $f^{(i+1)}\in V^{(i+1)}$ 。因此，我们将始终假设 $f^{(r)}\in V^{(r)}$，例如，通过假设验证者总是查询 $f^{(r)}$ 的前 $k^{(r)}$ 个元素（按照某种规范顺序）并将 $f^{(r)}$ 与该函数的插值多项式进行比较。

命题 1 给出了一种非常自然的测试方法，用来检查 $f^{(i)}$ 和 $f^{(i+1)}$ 之间的一致性，并且 FRI 的查询阶段通过从 "顶部"（$f^{(r)}$）到 "底部"（$f^{(0)}$）迭代应用这种自然测试来遵循这一过程。

🤔 **Question**

- [ ] 如何更好地去解释这里的自然的测试方法呢?

A single invocation of the FRI QUERY phase

1. 从 $\mathcal{D}^{(r)}$ 中均匀随机地选取 $g^{(r)}$ 。对于 $i=r,\cdots,1$ ，从陪集 $C_{g^{(i)}}^{(i-1)}$ 中均匀随机地选取 $g^{(i-1)}$ 。
2. 如果 $f^{(0)}(g^{(0)}) \neq f_0^{(0)}(g^{(0)}) + \sum_{i=1}^{t} x_i \cdot f_i^{(0)}(g^{(0)})$ ，则拒绝。
3. 如果，对于任意地 $i \in \{0,\cdots,r-1\}$ ，有 $f^{(i+1)}(g^{(i+1)}) \neq \left(\mathbf{z}^{(i)}\right)^{\intercal} \cdot M_g^{(i)} \cdot f^{(i)}|_{C_g^{(i)}}$ ，则拒绝。
4. 否则 —— 如果上述条件中的所有等式都成立，则接受。

上述 QUERY 过程与 [BBHR18] 中 FRI 的 QUERY 过程有所不同，这里选取随机数是从最后一个 $\mathcal{D}^{(r)}$ 中开始选取的，而不是从初始的 $\mathcal{D}^{(0)}$ 中选取的。相比[BBHR18] 中的 QUERY 阶段，这里我们还想要验证在第 0 步时，batch 的是否正确，也就是 $f^{(0)}(g^{(0)}) \neq f_0^{(0)}(g^{(0)}) + \sum_{i=1}^{t} x_i \cdot f_i^{(0)}(g^{(0)})$ 。

Summary of the batched FRI protocol

下面总结下目前提到的比较重要的性质，将会在下面的 soundness 分析中用到。

1. 在协议的 COMMIT 阶段结束时，verifier 可以通过 oracle 访问一系列函数 $f^{(0)}:\mathcal{D}^{(0)} \rightarrow \mathbb{F}, \ldots, f^{(r)}:\mathcal{D}^{(r)} \rightarrow \mathbb{F}$ ，其中 $\mathcal{D}^{(0)} \supsetneq \ldots \supsetneq \mathcal{D}^{(r)}$ 是一系列 2-smooth 群，并且 $f^{(i)}$ 任意依赖于 $z^{(0)},\ldots,z^{(i)}$ （以及 $f^{(0)},\ldots,f^{(i-1)}$ ）。我们假设 $f^{(r)} \in V^{(r)}$ 。
2. 存在一组 $l^{(i)} \times l^{(i)}$ 的可逆矩阵 $\{M_{g^{(i+1)}}^{(i)} : g^{(i+1)} \in D^{(i+1)}\}$ ，因此将 $M_{g^{(i+1)}}^{(i)}$ 应用于 $f^{(i)}|_{C_{g^{(i+1)}}^{(i)}}$ 可以将 $f^{(i)}$ 映射到一个向量序列 $\mathbf{u}=\mathbf{u}^{(i)}=\{u_0^{(i)},\ldots,u_{l(i)}^{(i)}\} \subset \mathbb{F}^{D^{(i+1)}}$ ，其中
$$\mathbf{u}^{(i)}\left(g^{(i+1)}\right)=\left(u_0^{(i)}\left(g^{(i+1)}\right),\cdots,u_{l^{(i)}-1}^{(i)}\left(g^{(i+1)}\right)\right)=M_{g^{(i+1)}}^{(i)} \cdot f^{(i)}|_{C_{g^{(i+1)}}^{(i)}}. \tag{4}$$

此外，如果 $f^{(i)}$ 是在 $D^{(i)}$ 上码率为 ρ 的有效 RS 码字，那么通过 $\mathbf{u}^{(i)}$ 的参数化曲线上的每个向量也是在 $D^{(i+1)}$ 上码率为 ρ 的有效 RS 码字。

1. 在 QUERY 阶段的每次迭代会检查 $f^{(i+1)}$ 是否是通过方程 (2) 从 $f^{(i)}$ 构造的，并且（在 batched 的情况下）检查 $f^{(0)}$ 是否是通过方程 (3) 正确计算的。

Soundness

Lemma 8.2 [BSCIK20, Lemma 8.2] (batched FRI error bound). Let $V^{(0)}=\mathrm{RS}[\mathbb{F},\mathcal{D}^{(0)},k^{(0)}]$ where $\mathcal{D}^{(0)}$ is a coset of a 2-smooth multiplicative group, and $k^{(0)}+1$ is a power of 2; set $\rho=(k^{(0)}+1)/|\mathcal{D}^{(0)}|$.

Let $F \subseteq \mathbb{F}^{\mathcal{D}^{(0)}}$ be a space of functions as defined in Eq. (3) whose correlated agreement density with $V^{(0)}$ is α. For interger $m \geq 3$, let

$$\alpha^{(0)}(\rho,m)=\max\{\alpha,\sqrt{\rho}(1+1/2m)\}. \tag{24}$$

Assume the FRI protocol is used with r rounds, and let $l^{(i)}=|\mathcal{D}^{(i)}|/|\mathcal{D}^{(i+1)}|$ denote the ratio between prover messages (oracles) i and $i+1$. Let ϵ_Q denote the probability that the verifier accepts a single FRI QUERY invocation. Then,

$$\Pr_{x_1,\ldots,x_t,z^{(0)},\ldots,z^{(r-1)}}\left[\epsilon_Q>\alpha^{(0)}(\rho,m)\right] \leq \epsilon_{\mathrm{C}}, \tag{8.5}$$

where

$$\epsilon_{\mathrm{C}}=\frac{\left(m+\frac{1}{2}\right)^7 \cdot |\mathcal{D}^{(0)}|^2}{2\rho^{3/2}|\mathbb{F}|}+\frac{(2m+1)\cdot(|\mathcal{D}^{(0)}|+1)}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{r-1} l^{(i)}}{|\mathbb{F}|}. \tag{25}$$

In words: For any interactive FRI prover P^*, the probability that the oracles $f^{(0)},\ldots,f^{(r)}$ sent by P^* will pass a single invocation of the batched FRI QUERY test with probability greater than $\alpha^{(0)}(\rho,m)$, is smaller than ϵ_{C}. The probability is over the random variables $x_1,\ldots,x_t$ used to sample $f^{(0)}$ from F and over the random messages $z^{(0)},\ldots,z^{(r-1)}$ sent by the verifier during the COMMIT phase.

Theorem 8.3 [BSCIK20, Theorem 8.3] (Batched FRI Soundness). Let $f_0^{(0)}, \ldots, f_t^{(r)} : \mathcal{D}^{(0)} \to \mathbb{F}$ be a sequence of functions and let $V^{(0)} = \mathrm{RS}[\mathbb{F}, \mathcal{D}^{(0)}, k^{(0)}]$ where $\mathcal{D}^{(0)}$ is a coset of a 2-smooth group of size $n^{(0)} = |\mathcal{D}^{(0)}|$, and $\rho = \frac{k^{(0)}+1}{n^{(0)}}$ satisfies $\rho = 2^{-\mathrm{R}}$ for positive integer R. Let $\alpha = \sqrt{\rho}(1 + 1/2m)$ for integer $m \geq 3$ and ϵ_{C} be as defined in Lemma 8.2.

Assume the FRI protocol is used with r rounds. Let $l^{(i)} = |\mathcal{D}^{(i)}|/|\mathcal{D}^{(i+1)}|$ denote the ratio between prover messages (oracles) i and $i+1$. Assume furthermore that s is the number of invocations of the FRI QUERY step.

Suppose there exists a batched FRI prover P^* that interacts with the batched FRI verifier and causes it to output "accept" with probability greater than

$$\epsilon_{\mathrm{FRI}} := \epsilon_{\mathrm{C}} + \alpha^s = \frac{\left(m + \frac{1}{2}\right)^7 \cdot |\mathcal{D}^{(0)}|^2}{2\rho^{3/2}|\mathbb{F}|} + \frac{(2m+1)\cdot(|\mathcal{D}^{(0)}|+1)}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^{r-1} l^{(i)}}{|\mathbb{F}|} + \left(\sqrt{\rho}\cdot\left(1 + \frac{1}{2m}\right)\right)^s. \tag{26}$$

Then $f_0^{(0)}, \ldots, f_t^{(0)}$ have correlated agreement with $V^{(0)}$ on a domain $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}^{(0)}$ of density at least α.

定理 8.3 证明: 反证法，然后直接通过引理 8.2 来证明。假设 $f_0^{(0)}, \ldots, f_t^{(0)}$ 与 $V^{(0)}$ 的最大 correlated agreement 小于 $\alpha^{(0)}(\rho, m) = \sqrt{\rho}(1 + 1/2m)$，但是同时接受的概率大于 $\epsilon_{\mathrm{C}} + (\alpha^{(0)}(\rho, m))^s$ 。

设 E 为在每次 FRI QUERY 阶段接受的概率大于 $\alpha^{(0)}(\rho, m)$ 的事件。这个事件依赖于 $x_1, \ldots, x_t, f^{(0)}, z^{(0)}, \ldots, z^{(r-1)}, f^{(r)}$ ，其中每个 $f^{(i)}$ 是 P^* 根据之前 Verifier 的消息生成的。通过引理 8.2，对于任意的 Prover P^* ，有事件 E 发生的概率不超过 ϵ_{C} 。当事件 E 不成立时，那么 s 次独立调用 FRI QUERY 都返回 "accept" 的概率不超过 $(\alpha^{(0)}(\rho, m))^s$ 。

因此，FRI 的 Verifier 接受的概率不超过 $\epsilon_{\mathrm{C}} + (\alpha^{(0)}(\rho, m))^s$ ，这与假设矛盾。 □

> ❓ **Question**
>
> - [ ] 这里每次 FRI QUERY 阶段接受的概率大于 $\alpha^{(0)}(\rho, m)$ 的事件 E，怎么联系调用 s 次的概率依然是不超过 ϵ_{C} 呢？为什么不是 $(\epsilon_{\mathrm{C}})^s$ 呢?

Proof of Lemma 8.2

在证明 Lemma 8.2 之前，先介绍一种跟踪 verifier 检查 consistency 是否通过的方法。具体来说，Prover 会根据 Verifier 发送的随机数 $z^{(i)}$ 来构造函数 $f^{(i+1)}$ ，然后向 Verifier 回应函数 $f^{(i+1)}$ 。在 FRI 的 QUERY 阶段， Verifier 会检查函数 $f^{(i+1)}$ 与函数 $f^{(i)}$ 的 consistency 。

定义一系列的加权(weight)函数，$\mu^{(i)} : \mathcal{D}^{(i)} \to [0,1]$ 以及 $\nu^{(i)} : \mathcal{D}^{(i)} \to [0,1]$ ，其中 $i = 0, \ldots, r$ 。这些加权函数是通过归纳法来定义的。当 $i = 0$ 时，用 $\{0,1\}$ weights 来指示 $f^{(0)}(g)$ 是否计算正确：

$$\mu^{(0)}(g) = \begin{cases} 1 & f^{(0)}(g) = f_0^{(0)}(g) + \sum_{i=1}^t x_i f_i^{(0)}(g) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{27}$$

现在，可以通过归纳法得到的 $\mu^{(i)}$ 可以来定义一个辅助 weight 函数 $\nu^{(i+1)} : \mathcal{D}^{(i+1)} \to [0,1]$ 。在 $\mathcal{D}^{(i+1)}$ 中取一个元素 g，就可以得到 $\mathcal{D}^{(i)}$ 中的陪集 $C_g^{(i)} \subset \mathcal{D}^{(i)}$ ，这个集合是由那些在 $\mathcal{D}^{(i)}$ 中能过通过映射 $q^{(i)}(x) = x^{l^{(i)}}$ 得到 g 的所有元素组成的，即如 (8.1) 所示，

$$C_g^{(i)} := \{g' \in \mathcal{D}^{(i)} \mid (g')^{l^{(i)}} = g\}. \tag{28}$$

那么 $\nu^{(i+1)}$ 的定义为

$$\nu^{(i+1)}(g) = \mathbb{E}_{g' \in C_g^{(i)}}\left[\mu^{(i)}(g')\right]. \tag{8.6}$$

换句话说，$\nu^{(i+1)}(g)$ 是陪集 $C_g^{(i)}$ 中的所有元素的 $\mu^{(i)}$ weight 的期望值。最后，来定义函数 $\mu^{(i+1)}$ ，对于每一个 $g \in \mathcal{D}^{(i+1)}$ ：

$$\mu^{(i+1)}(g) = \begin{cases} \nu^{(i+1)}(g) & f^{(i+1)}(g) = f_{f^{(i)}, z^{(i)}}^{(i+1)}(g) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{29}$$

关于 $\mu^{(i)}$ 的定义，一个很重要的性质就是，$\mu^{(i)}(g)$ 是在 g 从 $f^{(i)}$ 中 query 的条件下，FRI QUERY 阶段成功的概率的一个度量，这也是下面的命题成立的一个重要原因。

Claim 8.5. The probability ϵ_{Q} that a single invocation of the batched FRI QUERY accepts $f^{(0)}, \ldots, f^{(r)}$, where $f^{(r)} \in \mathrm{RS}[\mathbb{F}, \mathcal{D}^{(r)}, k^{(r)}]$, satisfies

$$\epsilon_{\mathrm{Q}} = \mathbb{E}_{g^{(r)} \in \mathcal{D}^{(r)}}\left[\mu^{(r)}(g^{(r)})\right]. \tag{30}$$

证明：回顾下 FRI QUERY 的调用，会选择一系列随机的 $g^{(r)}, \ldots, g^{(0)}$ ，其中 $g^{(i-1)}$ 是从陪集 $C_{g^{(i)}}^{(i-1)}$ 中均匀随机选取的。下面通过归纳法来证明，对于 $i = 0, \ldots, r$

$$\mathbb{E}_{g^{(i)} \in \mathcal{D}^{(i)}}\left[\mu^{(i)}(g^{(i)})\right] \tag{31}$$

等于这样的概率，当均匀随机地选取 $g^{(i)}$ ，并且其是从一个随机序列 $g^{(i-1)} \in C_{g^{(i)}}^{(i-1)}, \ldots, g^{(0)} \in C_{g^{(1)}}^{(0)}$ 中生成的时，所有和 $g^{(i)}$ 及其引发的测试都通过的概率。

归纳法证明的思路如下：

1. 证明对于 $i = 0$ 时，最基本的情况 $\mu^{(0)}$ 成立
2. 假设对于 $i - 1$ 时 $\mu^{(i-1)}$ 成立，证明对于 i 时 $\mu^{(i)}$ 成立

从而就能证明该命题。

当 $i = 0$ 时，由 $\mu^{(0)}$ 的定义，

$$\mu^{(0)}(g^{(0)}) = \begin{cases} 1 & f^{(0)}(g^{(0)}) = f_0^{(0)}(g^{(0)}) + \sum_{i=1}^{t} x_i f_i^{(0)}(g^{(0)}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{32}$$

调用 FRI QUERY 通过的概率自然等于 $\mathbb{E}_{g^{(0)} \in \mathcal{D}^{(0)}}\left[\mu^{(0)}(g^{(0)})\right]$ 。

假设对于 $i - 1$ 时 $\mu^{(i-1)}$ 成立，现在分析 $\mu^{(i)}(g^{(i)})$ ，如果 $f^{(i)}(g^{(i)})$ 未按照式 (8.2) 正确计算，那么 $\mu^{(i)}(g^{(i)}) = 0$ ，否则的话，根据定义

$$\mu^{(i)}(g^{(i)}) = \nu^{(i)}(g^{(i)}) = \mathbb{E}_{g^{(i-1)} \in C_{g^{(i)}}^{(i-1)}}\left[\mu^{(i-1)}(g^{(i-1)})\right]. \tag{33}$$

这说明 $\mu^{(i)}(g^{(i)})$ 是在陪集 $C_{g^{(i)}}^{(i-1)} \subseteq \mathcal{D}^{(i-1)}$ 上 $\mu^{(i-1)}$ 的值的平均值，由归纳法假设得，其是和 $g^{(i-1)}, \ldots, g^{(0)}$ 相关的所有测试通过的概率，因此可得对于 i 时 $\mu^{(i)}$ 成立。 □

Lemma 8.2 需要估计的是在 FRI QUERY 阶段的概率，回顾上面的 batched FRI QUERY 阶段的协议，有两个地方涉及到随机数：

1. 协议的第 2 步，使用 t 个随机数 $x_1, \ldots, x_t$ 来 batch $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, \ldots, f_t^{(0)}$ ，这对应 affine space 的情况，要用到定理 7.4 对应的结论。
2. 协议的第 3 步，用 $\mathbf{z}^{(i)} = \left(\left(z^{(i)}\right)^0, \left(z^{(i)}\right)^1, \ldots, \left(z^{(i)}\right)^{l^{(i)}-1}\right)$ 来进行 batch，对应 curves 的情况，会用到定理 7.2 的结论。

Lemma 8.2 证明：现在要证明引理 8.2，由命题 8.5，只需证明，在 verifier 的随机选择中，以大于概率 $1 - \epsilon_C$ 有

$$\mathbb{E}_{g \in \mathcal{D}^{(r)}}\left[\mu^{(r)}(g)\right] \leq \alpha^{(0)}(\rho, m). \tag{8.7}$$

如果证明了上述成立，那么也就是说当在 $\mathbb{F}_q$ 中选取随机数时，如果有 $\epsilon_Q > \alpha^{(0)}(\rho, m)$ ，那么其概率小于等于 ϵ_C ，这也就证明了引理 8.2。

> 🤔 **Question**
>
> - [ ] 这里为什么不是 “以大于概率 $1 - \epsilon_C$ 有”？

证明的思路是先定义一些列坏的事件 $E^{(0)}, \ldots, E^{(r)}$ ，其中一些事件会发生的概率是各个事件发生的概率之和，证明这个概率小于等于 ϵ_C 。接着再假设当没有坏的事件发生时，证明式子 (8.7) 成立。

令 $E^{(0)}$ 为事件

$$\text{agree}_{\mu^{(0)}}\left(f^{(0)}, V^{(0)}\right) > \alpha^{(0)}(\rho, m). \tag{34}$$

由 $\mu^{(0)}$ 的定义得事件 $E^{(0)}$ 为

$$\text{agree}\left(f_0^{(0)} + \sum_{i=1}^{t} x_i f_i^{(0)}, V^{(0)}\right) > \alpha^{(0)}(\rho, m) = \max\left\{\alpha, \sqrt{\rho}(1 + 1/2m)\right\}. \tag{35}$$

> 🤔 **Question**
>
> - [ ] 这里的 agree 具体是什么含义？和 $\text{agree}_{\mu^{(0)}}$ 的区别是什么？是表示常数 1 吗？

因此这个事件 $E^{(0)}$ 主要取决于随机数 $x_1,\ldots,x_t$ 。通过引理中的假设，有 $(f_0^{(0)},\ldots,f_t^{(0)})$ 与 $V^{(0)}$ 的最大 correlated agreement density 不超过 α 。

> 回顾下定理 7.4： **Theorem 7.4** (Weighted correlated agreement over affine spaces – Version II). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u}=\{u_0,\cdots,u_l\}\subset\mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ and let $U=u_0+\operatorname{span}\{u_1,\cdots,u_l\}\subset\mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$ be an affine subspace. Let $\mu:\mathcal{D}\to[0,1]$ be a vector of weights, whose values all have denominator M . Let $m\geq 3$ and let
>
> $$\alpha\geq\alpha_0(\rho,m):=\sqrt{\rho}+\frac{\sqrt{\rho}}{2m}. \tag{36}$$
>
> Suppose
>
> $$\Pr_{u\in U}[\operatorname{agree}_\mu(u,V)\geq\alpha]>\max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q},\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{M\cdot n+1}{q}\right). \tag{7.2}$$
>
> Then $u_0,\ldots,u_l$ have at least α correlated μ -agreement with V , i.e. $\exists v_0,\cdots,v_l\in V$ such that
>
> $$\mu\left(\{x\in\mathcal{D}:\forall 0\leq i\leq l, u_i(x)=v_i(x)\}\right)\geq\alpha. \tag{37}$$
>
> 则其逆否命题为：如果 $u_0,\ldots,u_l$ 与 V 有至多 α 的 correlated μ -agreement，那么有
>
> $$\Pr_{u\in U}[\operatorname{agree}_\mu(u,V)\geq\alpha]\leq\max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q},\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{M\cdot n+1}{q}\right). \tag{38}$$

由定理 7.4 的逆否命题，取 $\alpha=\alpha^{(0)}(\rho,m)$ ， $\mu\equiv 1$ 以及 $M=1$ ，有

$$\begin{aligned}\Pr_{x_1,\ldots,x_t}[E^{(0)}] &= \Pr_{u\in U}[\operatorname{agree}_\mu(u,V)>\alpha^{(0)}(\rho,m)]\\ &\quad\text{（为什么这里括号里能直接改为严格的>?）}\\ &\leq\max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q},\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{M\cdot n+1}{q}\right)\\ &=\max\left(\frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q},\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{n+1}{q}\right)\end{aligned} \tag{39}$$

注意，根据定理 7.4 以及定理 1.2，其中 $V=\mathsf{RS}[\mathbb{F}_q,\mathcal{D}^{(0)},k^{(0)}]$ ， $n=|\mathcal{D}^{(0)}|$ ， $\rho=\frac{k^{(0)}+1}{n}$ 。

下面推导下

$$\frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q}>\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{n+1}{q} \tag{40}$$

由于

$$\begin{aligned}&\frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3}\geq 2m+1\\ \Rightarrow&\frac{(2m+1)^7}{3\times 2^7}\geq 2m+1\\ \Rightarrow&(2m+1)^6\geq 3\times 2^7\end{aligned} \tag{41}$$

由定理中的条件 $m\geq 3$ ， $(2m+1)^6$ 在 $m\geq 3$ 是增函数，因此 $(2m+1)^6\geq(2\times 3+1)^6=7^6=117649$ ，同时上式的右边 $3\times 2^7=384$ ，满足 $(2m+1)^6\geq 117649>3\times 2^7$ ，由此得到 $\frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3}>2m+1$ (取不到等号)成立。那么

$$
\begin{aligned}
\frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q} &> \frac{2m+1}{\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q} \\
&= \frac{2m+1}{\rho\cdot\rho^{1/2}}\cdot\frac{n^2}{q} \\
&\text{(由于 } \rho<1 \text{)} \\
&> \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{n^2}{q} \\
&\text{(由于 } n\geq 2 \text{ 时 } n^2>n+1 \text{)} \\
&> \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{n+1}{q}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

从而

$$
\begin{aligned}
\Pr_{x_1,\ldots,x_t}[E^{(0)}] &\leq \max\left(\frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q}, \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{n+1}{q}\right) \\
&= \frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

令

$$
\epsilon = \frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}}\cdot\frac{n^2}{q} \quad \text{(注意其中 } n=|\mathcal{D}^{(0)}|\text{)}
\tag{44}
$$

得

$$
\Pr_{x_1,\ldots,x_t}[E^{(0)}] \leq \epsilon
\tag{8.8}
$$

现在固定 $i \in \{0,\ldots,r-1\}$ 。定义事件 $E^{(i+1)}$ 为

$$
\mathrm{agree}_{\nu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}, V^{(i+1)}\right) > \max\left(\mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right).
\tag{8.9}
$$

> 📖 **Notes** 理解下事件 $E^{(i+1)}$ 。根据定义
>
> $$
> \begin{aligned}
> \mathrm{agree}_{\nu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}, V^{(i+1)}\right) &= \max_{g^{(i+1)}\in V^{(i+1)}} \mathrm{agree}_{\nu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}, g^{(i+1)}\right) \\
> &= \max_{g^{(i+1)}\in V^{(i+1)}} \frac{1}{|\mathcal{D}^{(i+1)}|} \sum_{x:f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}(x)=g^{(i+1)}(x)} \nu^{(i+1)}(x) \\
> &= \max_{g^{(i+1)}\in V^{(i+1)}} \frac{1}{|\mathcal{D}^{(i+1)}|} \sum_{x:f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}(x)=g^{(i+1)}(x)} \mathbb{E}_{g'\in C_x^{(i)}}\left[\mu^{(i)}(g')\right]
> \end{aligned}
> \tag{45}
> $$
>
> 衡量的是由 $f^{(i)}$ 与随机数 $z^{(i)}$ 构造得到 $f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}$ 后，在 $\mathcal{D}^{(i+1)}$ 中找到使得 $f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}$ 能与 $V^{(i+1)}$ 中的一个多项式 $g^{(i+1)}$ 一致的 x ，再计算由这些 x 对应的在 $\mathcal{D}^{(i)}$ 中的陪集中的元素的 $\mu^{(i)}$ weight 的期望值之和。
>
> (8.9) 式右边中
>
> $$
> \mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right) = \max_{g^{(i)}\in V^{(i)}} \frac{1}{|\mathcal{D}^{(i)}|} \sum_{x:f^{(i)}(x)=g^{(i)}(x)} \mu^{(i)}(x)
> \tag{46}
> $$
>
> $\mu^{(i)}(x)$ 衡量的是当从 $f^{(i)}$ 中 qurey x 时，在 FRI QUERY 阶段能通过的概率。
>
> $E^{(i+1)}$ 事件想定义这样一些事件，通过 $f^{(i)}$ 与 $z^{(i)}$ 构造得到的 $f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}$ ，对于 $V^{(i+1)}$ 中的一个多项式 $g^{(i+1)}$ ，取出使得它们值相同的点 x 的集合，去计算这些点对应陪集的 $\mu^{(i)}$ weight 的期望之和与 $\mathcal{D}^{(i+1)}$ 的大小的比值。

固定 $f^{(i)}$ 与 $\mu^{(i)}$ ，则事件 $E^{(i+1)}$ 是由随机数 $z^{(i)}$ 决定的。根据 $\mu^{(i+1)}$ 的定义，有

$$
\mu^{(i+1)}(g) = \begin{cases} \nu^{(i+1)}(g) & f^{(i+1)}(g) = f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}(g) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\tag{47}
$$

当满足条件 $f^{(i+1)}(g) = f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}(g)$ 时，$\mu^{(i+1)}(g)$ 才会与 $\nu^{(i+1)}(g)$ 相等。自然可以得到

$$\text{agree}_{\mu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}, V^{(i+1)}\right) \leq \text{agree}_{\nu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}, V^{(i+1)}\right) \tag{48}$$

因此如果事件 E^{i+1} 不发生，那么再根据 (8.9) 式可以得到

$$\text{agree}_{\mu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}, V^{(i+1)}\right) \leq \text{agree}_{\nu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}, V^{(i+1)}\right) \leq \max\left(\text{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right) \tag{49}$$

则

$$\text{agree}_{\mu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}, V^{(i+1)}\right) \leq \max\left(\text{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right) \tag{8.10}$$

令 $\alpha = \max\left(\text{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right)$ 。根据定义，展开 $f^{(i+1)}_{f^{(i)},z^{(i)}}$ ，得到事件 $E^{(i+1)}$ 为

$$\text{agree}_{\nu^{(i+1)}}\left(u_0 + z^{(i)}u_1 + \ldots + (z^{(i)})^{l^{(i)}-1}u_{l^{(i)}-1}, V^{(i+1)}\right) > \alpha, \tag{50}$$

其中 $u_0, \ldots, u_{l^{(i)}-1} : \mathcal{D}^{(i+1)} \to \mathbb{F}$ 为在 FRI 协议定义中由 $f^{(i)}$ 得到的函数(见命题 8.1)。这正是定理 7.2 的所处理的情况。

> 📖 **回顾定理 7.2**
>
> **Theorem 7.2** (Weighted correlated agreement over curves – Version II). Let V, q, n, k and ρ be as defined in Theorem 1.2. Let $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_l\} \subset \mathbb{F}_q^{\mathcal{D}}$. Let $\mu : \mathcal{D} \to [0,1]$ be a vector of weights, whose values all have denominator M . Let $m \geq 3$ and let
>
> $$\alpha \geq \alpha_0(\rho, m) := \sqrt{\rho} + \frac{\rho}{2m}. \tag{51}$$
>
> Let
>
> $$S = \{z \in \mathbb{F}_q : \text{agree}_{\mu}(u_0 + zu_1 + \cdots + z^l u_l, V) \geq \alpha\} \tag{52}$$
>
> and suppose
>
> $$|S| > \max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}} n^2 l, \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}(M \cdot n + 1) l\right). \tag{7.1}$$
>
> Then $u_0, \ldots, u_l$ have at least α correlated μ -agreement with V , i.e. $\exists v_0, \cdots, v_l \in V$ such that
>
> $$\mu(\{x \in \mathcal{D} : \forall 0 \leq i \leq l, u_i(x) = v_i(x)\}) \geq \alpha. \tag{53}$$

在定理 7.2 中取 $M = |\mathcal{D}^{(0)}|/|\mathcal{D}^{(i+1)}|$ ，这时我们分析的是 $i+1$ 的情况，因此定理中 $n = |\mathcal{D}^{i+1}|$ ，则 $M \cdot n = |\mathcal{D}^{(0)}|$。由于我们分析的 $\mathbf{u} = \{u_0, \cdots, u_{l^{(i)}-1}\}$ ，因此 式 (7.1) 中的 $l = l^{(i)} - 1$。根据定理 7.2 ，如果

$$\Pr_{z^{(i)}}\left[E^{(i+1)}\right] \geq (l^{(i)} - 1) \cdot \left(\epsilon^{(i)} + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{|\mathcal{D}^{(0)}| + 1}{|\mathbb{F}|}\right) \tag{54}$$

其中，

$$\epsilon^{(i)} = \frac{|\mathcal{D}^{(i+1)}|^2}{|\mathcal{D}^{(0)}|^2}\epsilon = \frac{\epsilon}{(l^{(0)} \cdots l^{(i)})^2} = \frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}} \cdot \frac{|\mathcal{D}^{(0)}|^2}{q} \cdot \frac{1}{(l^{(0)} \cdots l^{(i)})^2} \tag{55}$$

如果满足上述条件，对照定理 7.2 ，则有

$$\begin{aligned}
|S| &\geq |\mathbb{F}| \cdot (l^{(i)} - 1) \cdot \left(\epsilon^{(i)} + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{|\mathcal{D}^{(0)}| + 1}{\mathbb{F}}\right) \\
&= \frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}} \cdot \frac{|\mathcal{D}^{(0)}|^2}{q} \cdot \frac{|\mathcal{D}^{(i+1)}|^2}{|\mathcal{D}^{(0)}|^2} \cdot |\mathbb{F}| \cdot (l^{(i)} - 1) + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}} \cdot (|\mathcal{D}^{(0)}| + 1) \cdot (l^{(i)} - 1) \\
&= \frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}} \cdot |\mathcal{D}^{(i+1)}|^2 \cdot (l^{(i)} - 1) + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}} \cdot (M \cdot n + 1) \cdot (l^{(i)} - 1) \\
&= \frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}} \cdot n^2 \cdot (l^{(i)} - 1) + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}} \cdot (M \cdot n + 1) \cdot (l^{(i)} - 1) \\
&> \max\left(\frac{(1+\frac{1}{2m})^7 m^7}{3\rho^{3/2}} n^2 l, \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}(M \cdot n + 1) l\right)
\end{aligned} \tag{56}$$

满足式 (7.1)，因此由定理 7.2 可得存在一个集合 $S \subseteq \mathcal{D}^{(i+1)}$，存在码字 $v_0, \ldots, v_{l^{(i)}-1} \in V$，满足 u_i 与 v_i 在 S 上一致，并且 $\nu^{(i+1)}(S) > \alpha$。回顾式 (8.4)，知

$$\mathbf{u}^{(i)}\left(g^{(i+1)}\right) = M^{(i)}_{g^{(i+1)}} \cdot f^{(i)}|_{C^{(i)}_{g^{(i+1)}}} \tag{57}$$

可逆的插值映射 $M^{(i)}_{g^{(i+1)}}$ 将 $f^{(i)}|_{C^{(i)}_{g^{(i+1)}}}$ 映射到了 $\mathbf{u}^{(i)}\left(g^{(i+1)}\right)$。使用其逆映射，即 evaluation 映射，对每一个 $g^{(i+1)} \in \mathcal{D}^{(i+1)}$，将该逆映射作用到 $v_0(g^{(i+1)}), \ldots, v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)})$ 上，设 $C^{(i)}_{g^{(i+1)}} = \{g'_0, \cdots, g'_{l^{(i)}-1}\}$，则作用后的结果为

$$\begin{aligned}
\left(M^{(i)}_{g^{(i+1)}}\right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} v_0(g^{(i+1)}) \\ v_1(g^{(i+1)}) \\ \vdots \\ v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)}) \end{bmatrix} &= V_{C^{(i)}_{g^{(i+1)}}} \cdot \begin{bmatrix} v_0(g^{(i+1)}) \\ v_1(g^{(i+1)}) \\ \vdots \\ v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & g'_0 & (g'_0)^2 & \cdots & (g'_0)^{l^{(i)}-1} \\ 1 & g'_1 & (g'_1)^2 & \cdots & (g'_1)^{l^{(i)}-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & g'_{l^{(i)}-1} & (g'_{l^{(i)}-1})^2 & \cdots & (g'_{l^{(i)}-1})^{l^{(i)}-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0(g^{(i+1)}) \\ v_1(g^{(i+1)}) \\ \vdots \\ v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} v_0(g^{(i+1)}) + v_1(g^{(i+1)})g'_0 + u_2(g'_0)^2 + \cdots + v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)})(g'_0)^{l^{(i)}-1} \\ v_0(g^{(i+1)}) + v_1(g^{(i+1)})g'_1 + u_2(g'_1)^2 + \cdots + v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)})(g'_1)^{l^{(i)}-1} \\ \vdots \\ v_0(g^{(i+1)}) + v_1(g^{(i+1)})g'_{l^{(i)}-1} + u_2(g'_{l^{(i)}-1})^2 + \cdots + v_{l^{(i)}-1}(g^{(i+1)})(g'_{l^{(i)}-1})^{l^{(i)}-1} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} h^{(i)}(g'_0) \\ h^{(i)}(g'_1) \\ \vdots \\ h^{(i)}(g'_{l^{(i)}-1}) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{58}$$

可以得到函数 $h^{(i)}: \mathcal{D}^{(i)} \to \mathbb{F}$，对于每一个 $g^{(i)} \in C^{(i)}_{g^{(i+1)}}$ 有

$$h^{(i)}(g^{(i)}) = \sum_{j=0}^{l^{(i)}-1} \left(g^{(i)}\right)^j \cdot v_j\left(g^{(i+1)}\right) = \sum_{j=0}^{l^{(i)}-1} \left(g^{(i)}\right)^j \cdot v_j\left(\left(g^{(i)}\right)^{l^{(i)}}\right). \tag{59}$$

因此，由于 $v_j \in V^{(i+1)}$，因此 $h^{(i)} \in V^{(i)}$。另外，根据定义

$$\begin{aligned}
\mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right) &= \max_{v \in V^{(i)}} \mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, v\right) \\
&\geq \mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, h^{(i)}\right) \\
&= \frac{1}{|\mathcal{D}^{(i)}|} \sum_{x: f^{(i)}(x) = h^{(i)}(x)} \mu^{(i)}(x) \\
&= \nu^{(i+1)}(S) \\
&> \alpha,
\end{aligned} \tag{60}$$

这与 α 的定义 $\alpha = \max\left(\mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right), \sqrt{\rho}(1 + 1/2m)\right)$ 是矛盾的。那么说明我们在应用定理 7.2 时所给的假设是不成立的，也就是下式成立：

$$\Pr_{z^{(i)}}\left[E^{(i+1)}\right] < (l^{(i)} - 1) \cdot \left(\epsilon^{(i)} + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}} \cdot \frac{|\mathcal{D}^{(0)}| + 1}{|\mathbb{F}|}\right). \tag{61}$$

因此，如果没有事件 $E^{(i+1)}$ 发生，根据 (8.10) 式，对于所有的 $i \in 0, 1, \ldots, r-1$ 都有：

$$\mathrm{agree}_{\mu^{(i+1)}}\left(f^{(i+1)}, V^{(i+1)}\right) \leq \max\left(\mathrm{agree}_{\mu^{(i)}}\left(f^{(i)}, V^{(i)}\right), \sqrt{\rho}(1 + 1/2m)\right) \tag{62}$$

根据式 (8.8) 得到

$$\Pr_{x_1,\ldots,x_t}[E^{(0)}] \le \epsilon, \quad \text{其中}\epsilon = \frac{(m+\frac{1}{2})^7}{3\rho^{3/2}} \cdot \frac{\left|\mathcal{D}^{(0)}\right|^2}{q}. \tag{63}$$

如果事件 $E^{(0)}$ 或者一些 $E^{(i+1)}$ 发生的概率估计为

$$\begin{aligned}\Pr_{x_1,\ldots,x_t}\left[E^{(0)}\right] + \sum_{i=0}^{r-1}\Pr_{z^{(i)}}\left[E^{(i+1)}\right] &\le \epsilon + \sum_{i=0}^{r-1}\left((l^{(i)}-1)\cdot\left(\epsilon^{(i)} + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\right)\right) \\ &= \epsilon + \sum_{i=0}^{r-1}(l^{(i)}-1)\cdot\epsilon^{(i)} + \sum_{i=0}^{r-1}\left((l^{(i)}-1)\cdot\frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\right) \\ &= \left(1+\sum_{i=0}^{r-1}\frac{l^{(i)}-1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}\right)\epsilon + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\cdot\sum_{i=0}^{r-1}(l^{(i)}-1)\end{aligned} \tag{64}$$

下面估计下 $\sum_{i=0}^{r-1}\frac{l^{(i)}-1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}$ ，由于对于 $i\in\{0,\ldots,r-1\}$ 有 $l^{(i)}\ge 2$ ，因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{r-1}\frac{l^{(i)}-1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2} &= \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{l^{(i)}}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2} - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}\right) \\ &= \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i-1)})^2 l^{(i)}} - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}\right) \\ &= \frac{1}{l^{(0)}} + \left(-\frac{1}{(l^{(0)})^2} + \frac{1}{(l^{(0)})^2 l^{(1)}}\right) + \left(-\frac{1}{(l^{(0)}l^{(1)})^2} + \frac{1}{(l^{(0)}l^{(1)})^2 l^{(2)}}\right) \\ &\quad + \ldots + \left(-\frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-2)})^2} + \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-2)})^2 l^{(r-1)}}\right) - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-1)})^2} \\ &\le \frac{1}{l^{(0)}} + \left(-\frac{1}{(l^{(0)})^2} + \frac{1}{(l^{(0)})^2\cdot 2}\right) + \left(-\frac{1}{(l^{(0)}l^{(1)})^2} + \frac{1}{(l^{(0)}l^{(1)})^2\cdot 2}\right) \\ &\quad + \ldots + \left(-\frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-2)})^2} + \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-2)})^2\cdot 2}\right) - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-1)})^2} \\ &= \frac{1}{l^{(0)}} - \frac{1}{(l^{(0)})^2\cdot 2} - \frac{1}{(l^{(0)}l^{(1)})^2\cdot 2} - \ldots - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-2)})^2\cdot 2} \\ &\quad - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(r-1)})^2} \\ &< \frac{1}{l^{(0)}} \\ &< \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{65}$$

📖 **另一种证明方法：利用等比数列求和**

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{r-1} \frac{l^{(i)}-1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2} &= \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{l^{(i)}}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2} - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}\right) \\
&= \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i-1)})^2 l^{(i)}} - \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}\right) \\
&< \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i-1)})^2 l^{(i)}} \\
&\quad (\text{因为} \frac{1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2} > 0) \\
&< \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{l^{(0)}\cdots l^{(i-1)} l^{(i)}} \\
&\quad (\text{因为} l^{(i)} \geq 2, \text{因此} {l^{(i)}}^2 > l^{(i)}) \\
&< \sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} \\
&< \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&< \frac{1}{2}
\end{aligned}
\tag{66}
$$

🤔 **Question**

- [ ] 关于上述证明还有更简洁的方式吗?

因此

$$
\begin{aligned}
\Pr_{x_1,\ldots,x_t}\left[E^{(0)}\right] + \sum_{i=0}^{r-1}\Pr_{z^{(i)}}\left[E^{(i+1)}\right] &\leq \left(1+\sum_{i=0}^{r-1}\frac{l^{(i)}-1}{(l^{(0)}\cdots l^{(i)})^2}\right)\epsilon + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\cdot\sum_{i=0}^{r-1}(l^{(i)}-1) \\
&< \left(1+\frac{1}{2}\right)\epsilon + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\cdot\sum_{i=0}^{r-1}(l^{(i)}-1) \\
&< \frac{3}{2}\epsilon + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\cdot\sum_{i=0}^{r-1} l^{(i)}.
\end{aligned}
\tag{67}
$$

综上所述，我们得到了当某些坏的事件 $E^{(i)}$ 发生时，其概率严格小于

$$
\frac{3}{2}\epsilon + \frac{2m+1}{\sqrt{\rho}}\cdot\frac{|\mathcal{D}^{(0)}|+1}{|\mathbb{F}|}\cdot\sum_{i=0}^{r-1} l^{(i)} = \epsilon_C, \tag{68}
$$

当没有坏的事件发生时，下面的式子成立

$$
\begin{aligned}
\mathrm{agree}_{\mu^{(r)}}\left(f^{(r)}, V^{(r)}\right) &= \mathbb{E}_{g^{(r)}\in\mathcal{D}^{(r)}}\left[\mu^{(r)}(g^{(r)})\right] \\
&\quad (\text{因为} f^{(r)} \in V^{(r)}) \\
&\leq \max\left(\mathrm{agree}_{\mu^{(r-1)}}\left(f^{(r-1)}, V^{(r-1)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right) \\
&\quad (\text{根据事件} E^{(i+1)} \text{的定义，见式}(8.9)) \\
&\leq \max\left(\mathrm{agree}_{\mu^{(r-2)}}\left(f^{(r-2)}, V^{(r-2)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right) \\
&\leq \ldots \\
&\leq \max\left(\mathrm{agree}_{\mu^{(0)}}\left(f^{(0)}, V^{(0)}\right), \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right) \\
&= \max\left(\alpha, \sqrt{\rho}(1+1/2m)\right) \\
&= \alpha^{(0)}(\rho, m)
\end{aligned}
\tag{69}
$$

至此，证得式 (8.7) 成立，由此得证引理 8.2。 □

参考文献

- [BBHR18] Eli Ben-Sasson, Iddo Bentov, Yinon Horesh, and Michael Riabzev. “Fast Reed–Solomon Interactive Oracle Proofs of Proximity”. In: *Proceedings of the 45th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, 2018.
- [BCIKS20] Eli Ben-Sasson, Dan Carmon, Yuval Ishai, Swastik Kopparty, and Shubhangi Saraf. Proximity Gaps for Reed–Solomon Codes. In *Proceedings of the 61st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 900–909, 2020.
- [RVW13] Guy N. Rothblum, Salil Vadhan, and Avi Wigderson. Interactive proofs of proximity: delegating computation in sublinear time. In *Proceedings of the forty-fifth annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 793–802. ACM, 2013.