Basefold 在 List Decoding 下的 Soundness 证明概览

- Jade Xie jade@secbit.io
- Yu Guo yu.guo@secbit.io

本篇文章主要梳理 Ulrich Haböck 在论文 [H24] 中给出的关于 Basefold [ZCF23] 给出的 multilinear PCS 在 list decoding 下的安全性证明。在论文 [ZCF23] 中，给出的 soundness 证明是在 unique decoding 下针对 foldable linear code 的，而在 [H24] 中，其证明是针对 Reed-Solomon code 的，且是在 list decoding 下，将界提升到了 Johnson bound，即 $1-\sqrt{\rho}$ 。为了证明安全性，论文中给出了两个比 [BCIKS20] 给出的 correlated agreement 更强的 correlated agreement 定理：

1. [H24, Theorem 3] Correlated agreement for subcodes.
2. [H24, Theorem 4] Weighted correlated agreement for subcodes.

如果考虑 Basefold 协议应用在 Reed-Solomon code 上，该协议结合了 FRI 和 sumcheck，要证明其安全性，[H24] 提出了能结合 sumcheck 约束的 subcodes，它是在 Reed-Solomon code 的基础上添加了类似 sumcheck 的约束，这样再结合对应的 correlated agreement 定理，就能对协议进行安全性证明了。

Basefold 协议

对于一个多元线性多项式 $P(X_1, X_2, \ldots, X_n) \in F[X_1, \ldots, X_n]$ ，想要证明对于任何来自 F^n 的查询 $\vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ ，有 $v = P(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 。为了实现多元线性多项式 $P(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 的 PCS，Basefold 协议结合了 Sumcheck 与 FRI 协议。下面结合论文 [H24] 中的描述，进行介绍。

结合 Sumcheck 协议

为了证明 $v = P(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ ，首先将查询的值 $P(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 转换为 Sumcheck 求和形式，即

$$P(\omega_1, \ldots, \omega_n) = \sum_{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in H_n} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \cdot P(\vec{x}) \tag{1}$$

其中 $H_n = \{0,1\}^n$ ，这里 $L(\vec{x}, \vec{\omega})$ 其实就是 $eq(\cdot, \cdot)$ 函数，即

$$L(\vec{x}, \vec{\omega}) = \prod_{i=1}^{n} ((1-x_i)(1-\omega_i) + x_i\omega_i) \tag{2}$$

因此要证明的 $v = P(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ 就转换为了证明在 H_n 上的求和，即

$$\sum_{\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\in H_n} L(\vec{x}, \vec{\omega}) \cdot P(\vec{x}) = v \tag{3}$$

接下来用 Sumcheck 协议可以证明该求和正确。

对于 $i = 1, \ldots, n-1$ ，Prover 需要根据挑战的随机数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ ，构造一个一元多项式为

$$q_i(X) = \sum_{\vec{x}=(x_{i+2},\ldots,x_n)\in H_{n-(i+1)}} L(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, X, \vec{x}, \vec{\omega}) \cdot P(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, X, \vec{x}) \tag{4}$$

其对应的就是多项式 $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, X, \omega_{i+2}, \ldots, \omega_n)$ 。

可以看到在 $q_i(X)$ 中，$L(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, X, \vec{x}, \vec{\omega})$ 关于 X 是一次的，而 $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_i, X, \vec{x})$ 关于 X 也是一次的，它们相乘之后关于 X 就变成二次的了，为了后续和对于 linear subcodes 的 correlated agreement 定理相对应，这里提取出关于 X 的一次线性项，Prover 需要发送的是线性多项式

$$\Lambda_i(X) = \sum_{\vec{x}=(x_{i+2},\ldots,x_n)\in H_{n-(i+1)}} L(\vec{x},(\omega_{i+2},\ldots,\omega_n))\cdot P(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,X,\vec{x}) \tag{5}$$

由于

$$\begin{aligned} L((\lambda_1,\ldots,\lambda_i,X,\vec{x}),\vec{\omega}) &= L((\lambda_1,\ldots,\lambda_i,X,\vec{x}),(\omega_1,\ldots,\omega_i,\omega_{i+1},\omega_{i+2},\ldots,\omega_n)) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{i}[(1-\lambda_j)(1-\omega_j)+\lambda_j\omega_j]\right) \\ &\quad \cdot((1-\lambda_{i+1})(1-\omega_{i+1})+X\cdot\omega_{i+1}) \\ &\quad \cdot\left(\prod_{j=i+2}^{n}[(1-\lambda_j)(1-\omega_j)+\lambda_j\omega_j]\right) \\ &= L(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\omega_1,\ldots,\omega_i)\cdot L(X,\omega_{i+1})\cdot L(\vec{x},(\omega_{i+2},\ldots,\omega_n)) \end{aligned} \tag{6}$$

因此

$$q_i(X) = L(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,\omega_1,\ldots,\omega_i)\cdot L(X,\omega_{i+1})\cdot\Lambda_i(X). \tag{7}$$

Prover 只需要提供 $\Lambda_i(X)$ ，Verifier 可以自己通过上式来计算 $q_i(X)$ 。

在 Sumcheck 协议中，Prover 先发送一个单变量多项式 $\Lambda_0(X)=\sum_{\vec{x}=(x_2,\ldots,x_n)\in H_{n-1}} L(\vec{x},(\omega_2,\ldots,\omega_n))\cdot P(X,\vec{x})$ 以及 $s_0=v$ ，接着在第 $1\le i\le n-1$ 轮中，

1. Verifier 可以根据 $\Lambda_{i-1}(X)$ 计算出 $q_{i-1}(X)$ 并检查 $s_{i-1}=q_{i-1}(0)+q_{i-1}(1)$ 。接着选择一个随机数 $\lambda_i \leftarrow \$F$ 发送给 Prover。
2. Prover 根据 λ_i 计算可以得到 $P(\lambda_1,\ldots,\lambda_i,X_{i+1},\ldots,X_n)$ ，据此算出 $\Lambda_i(X)$ 发送给 Verifier，并且 Prover 和 Verifier 同时令 $s_i=q_{i-1}(\lambda_i)$ 。

在 Sumcheck 的最后一步需要得到 $P(X_1,\ldots,X_n)$ 在一个随机点 $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 处的值，即

$$P(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \tag{8}$$

该值可以通过在 FRI 协议中用同样的随机数 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 对一个与多元线性多项式 $P(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 的次数不超过 2^n-1 的一元多项式 $f_0(X)$ 进行折叠得到。对 $f_0(X)$ 进行 n 次折叠，最后会得到一个常数 c ，我们希望其值就是 $P(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=c$ 。

结合 FRI 协议

对于多元线性多项式 $P(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ ，有一个一元多项式 $f_0(X)$ （[H24] 中称之为 *univariate representation*）与其进行对应，

$$f_0(X)=\sum_{i=0}^{2^n-1}P(i_1,\ldots,i_n)\cdot X^i \tag{9}$$

其中，$i_1,\ldots,i_n$ 是 i 的二进制表示，i_1 表示最低位，i_n 表示最高位。

例如，$n=3$ ，假设多元线性多项式为

$$P(X_1,X_2,X_3)=a_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_1X_2+a_4X_3+a_5X_1X_3+a_6X_2X_3+a_7X_1X_2X_3 \tag{10}$$

则与 $P(X_1,X_2,X_3)$ 对应的一元多项式 $f_0(X)$ 为

$$
\begin{aligned}
f_0(X) &= \sum_{i=0}^{7} P(i_1, i_2, i_3) \cdot X^i \\
&= P(0,0,0) + P(1,0,0)X + P(0,1,0)X^2 + P(1,1,0)X^3 \\
&\quad + P(0,0,1)X^4 + P(1,0,1)X^5 + P(0,1,1)X^6 + P(1,1,1)X^7 \\
&= (P(0,0,0) + P(0,1,0)X^2 + P(0,0,1)X^4) \\
&\quad + X \cdot (P(1,0,0) + P(1,1,0)X^2 + P(1,0,1)X^4 + P(1,1,1)X^6) \\
&= f_{0,0}(X^2) + X \cdot f_{0,1}(X^2)
\end{aligned} \tag{11}
$$

这里 $f_{0,0}(X^2)$ 对应了 $f_0(X)$ 的偶数项，而 $f_{0,1}(X^2)$ 对应了 $f_0(X)$ 的奇数项。可以发现偶数项中 $P(0,0,0) + P(0,1,0)X^2 + P(0,0,1)X^4$ 系数对应了多元线性多项式中的 $P(0,\cdot,\cdot)$ ，奇数项的系数则对应了 $P(1,\cdot,\cdot)$ 。换句话说，$f_{0,0}(X)$ 是 $P(0, X_2, X_3)$ 的 *univariate representation* ，$f_{0,1}(X)$ 是 $P(1, X_2, X_3)$ 的 univariate representation ，因为

$$
\begin{aligned}
f_{0,0}(X) &= \sum_{i=0}^{3} P(0, i_1, i_2) \cdot X^i \\
f_{0,1}(X) &= \sum_{i=0}^{3} P(1, i_1, i_2) \cdot X^i
\end{aligned} \tag{12}
$$

用 λ_1 对 $f_{0,0}(X)$ 与 $f_{0,1}(X)$ 进行折叠，可以得到

$$
f_1(X) = (1 - \lambda_1) \cdot f_{0,0}(X) + \lambda_1 \cdot f_{0,1}(X) \tag{13}
$$

而 $f_1(X)$ 恰是 $P(\lambda_1, X_2, X_3)$ 的 *univariate representation* 。注意这里折叠的方式并不是 FRI 协议中常见的

$$
f_1(X) = f_{0,0}(X) + \lambda_1 \cdot f_{0,1}(X) \tag{14}
$$

这是因为在这种情况下，得到的 $f_1(X)$ 并不能与 $P(\lambda_1, X_2, \ldots, X_n)$ 对应，这和一元多项式与多元线性多项式之间的对应关系是绑定的，在这种折叠方式下，它们之间的对应关系应该变为(WHIR 论文 [ACFY24] 采取的就是这种对应方式)：

$$
f_0(X) = P(X^{2^0}, X^{2^1}, \ldots, X^{2^{n-1}}) \tag{15}
$$

这里就不展开推导在这种对应关系下 $f_1(X)$ 能与 $P(\lambda_1, X_2, \ldots, X_n)$ 对应。

回到论文 [H24] 给出的一元多项式与多元线性多项式的对应关系，现在推导下在用 $1 - \lambda_1$ 和 λ_1 对 $f_0(X)$ 折叠得到的 $f_1(X)$ 确实是与 $P(\lambda_1, X_2, X_3)$ 对应的。对于一般的 $P(X_1, \ldots, X_n)$ 有

$$
P(\vec{X}) = \sum_{\vec{x} \in H_n} P(\vec{x}) \cdot L(\vec{x}, \vec{X}) \tag{16}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
P(\lambda_1, X_2, \ldots, X_n) &= \sum_{\vec{b} \in H_n} P(\vec{b}) \cdot L(\vec{b}, (\lambda_1, X_2, \ldots, X_n)) \\
&= \sum_{\vec{b} \in H_n} \left(P(\vec{b}) \cdot ((1-b_1)(1-\lambda_1) + b_1\lambda_1) \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&= \sum_{\vec{b} \in H_{n-1}} \left(P(0, \vec{b}) \cdot ((1-0)(1-\lambda_1) + 0 \cdot \lambda_1) \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&\quad + \sum_{\vec{b} \in H_{n-1}} \left(P(1, \vec{b}) \cdot ((1-1)(1-\lambda_1) + 1 \cdot \lambda_1) \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&= \sum_{\vec{b} \in H_{n-1}} \left(P(0, \vec{b}) \cdot (1-\lambda_1) \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&\quad + \sum_{\vec{b} \in H_{n-1}} \left(P(1, \vec{b}) \cdot \lambda_1 \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&= (1-\lambda_1) \sum_{\vec{b} \in H_{n-1}} \left(P(0, \vec{b}) \cdot \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&\quad + \lambda_1 \sum_{\vec{b} \in H_{n-1}} \left(P(1, \vec{b}) \cdot \prod_{i=2}^{n} [(1-b_i)(1-X_i) + b_iX_i] \right) \\
&= (1-\lambda_1) P(0, X_2, \ldots, X_n) + \lambda_1 P(1, X_2, \ldots, X_n)
\end{aligned} \tag{17}
$$

从而有

$$
\begin{aligned}
f_1(X) &= (1-\lambda_1) \cdot f_{0,0}(X) + \lambda_1 \cdot f_{0,1}(X) \\
&= (1-\lambda_1) \cdot \sum_{i=0}^{3} P(0, i_1, i_2) \cdot X^i + \lambda_1 \cdot \sum_{i=0}^{3} P(1, i_1, i_2) \cdot X^i \\
&= \sum_{i=0}^{3} ((1-\lambda_1) P(0, i_1, i_2) + \lambda_1 P(1, i_1, i_2)) \cdot X^i \\
&= \sum_{i=0}^{3} P(\lambda_1, i_1, i_2) \cdot X^i
\end{aligned} \tag{18}
$$

至此也就说明了 $f_1(X)$ 是 $P(\lambda_1, X_2, X_3)$ 的 univariate representation 。接着按这种方式对 $f_1(X)$ 用随机数 λ_2, λ_3 进行折叠，最后得到常数多项式，其值就恰好对应 $P(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ 。总结一下，Basefold 协议就是一边用随机数对多元线性多项式进行 Sumcheck 协议，一边用同样的随机数对对应的一元多项式进行 FRI 协议，从而实现多元线性多项式的 PCS，这对应 [H24, Protocol 1] ，是针对 Reed-Solomon 的 Basefold 协议 。整体协议的思路如此，这里就不再复述具体的协议流程了，详见 [H24, Protocol 1] 。

> 🐞 **typo** 在 [H24, Protocol 1] 中，Query 阶段论文中写道需要检验的折叠关系为
>
> $$f_{i+1}(x_{i+1}) = \frac{f_0(x_i) + f_0(-x_i)}{2} + \lambda_i \cdot \frac{f_0(x_i) + f_0(-x_i)}{2 \cdot x_i} \tag{19}$$
>
> 但根据前文给出的折叠关系，我认为应该改为
>
> $$f_{i+1}(x_{i+1}) = (1-\lambda_i) \cdot \frac{f_0(x_i) + f_0(-x_i)}{2} + \lambda_i \cdot \frac{f_0(x_i) - f_0(-x_i)}{2 \cdot x_i} \tag{20}$$

[H24] 论文证明的 soundness 是针对的更通用的一个协议，即 batch 版本的 Basefold 协议。

> **Protocol 2** [H24, Protocol 2] (Batch Reed-Solomon code Basefold). The prover shares the Reed-Solomon codewords $g_0, \ldots, g_M \in \mathcal{C}_0 = \mathrm{RS}_{2^n}[F, D_0] = \{q(x)|_{x \in D_0} : q(x) \in F[X]^{<2^n}\}$ of the multilinears $G_0, \ldots, G_M$, together with their evaluation claims $v_0, \ldots, v_M$ at $\vec{\omega} \in F^n$ with the verifier. Then they engage in the following extension of Protocol 1:
>
> 1. In a preceding round $i = 0$, the verifier sends a random $\lambda_0 \leftarrow \$F$, and the prover answers with the oracle for
>
> $$f_0 = \sum_{k=0}^{M} \lambda_0^k \cdot g_k \tag{1}$$
>
> Then both prover and verifier engage in Protocol 1 on f_0 and the claim $v_0 = \sum_{k=0}^{M} \lambda_0^k \cdot v_k$. In addition to the checks in Protocol 1, the verifier also checks that equation (1) holds at every sample x from D_0.

batch 版本的 Basefold 协议其实就是用一个随机数 λ_0 ，通过它的幂次将 $g_0, \ldots, g_M$ 线性组合起来，转换成一个函数 f_0 ，再对它用 Protocol 1。

Soundness 概览

本节主要分析 Protocol 2 的 soundness error 证明思路。首先说明 soundness error 的含义，对于任意一个可能作恶的 Prover P^* ，其给出的 $g_0, \ldots, g_M$ 中存在 g_k 距离 Reed-Solomon 编码空间 $\mathcal{C}_0$ 超过 θ （[H24] 中研究 list decoding 下的证明，因此考虑参数 $\theta \in \left(\frac{1-\rho}{2}, 1 - \sqrt{\rho}\right)$ ），或者 g_k 对应的 multilinear representation P_k 不满足 evaluation claim $P_k(\vec{\omega}) = v_k$ ，在此条件下，P^* 通过 Verifier 检查的概率不超过 ε ，这个概率 ε 就称为 soundness error。换句话说，soundness error 就是分析作恶的 Prover P^* 能侥幸通过 Verifier 检查的概率。P^* 能侥幸通过检查，可能发生的地方会是那些引入随机的地方，分析协议发现有三处：

1. Commit 阶段
    1. 用随机数 λ_0 将 $g_0, \ldots, g_M$ 进行 batch，设此概率为 ε_{C_1} 。
    2. 用随机数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 进行 sumcheck 协议与类似 FRI 折叠的过程，设此概率为 ε_{C_2} 。
2. Query 阶段
    1. Verifier 随机选取 $x_0 \leftarrow D_0$ 来检查折叠是否正确，设此概率为 $\varepsilon_{\text{query}}$

因此，整个协议的 soundness error 为

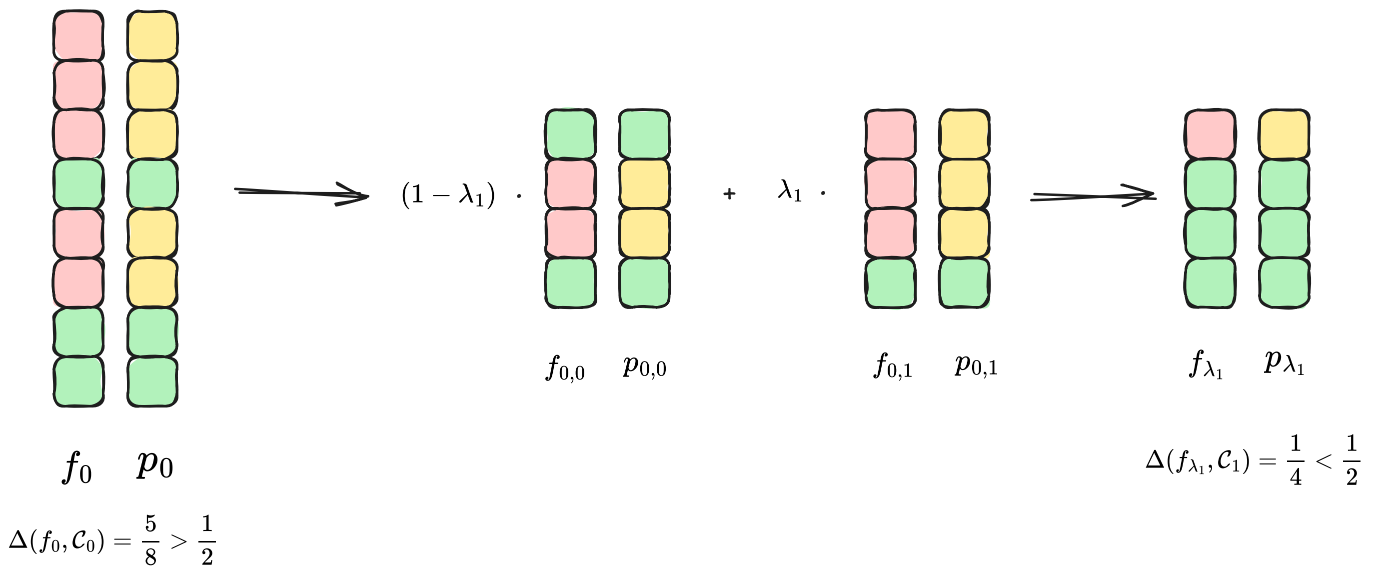
$$\varepsilon < \varepsilon_{C_1} + \varepsilon_{C_2} + \varepsilon_{\text{query}}. \tag{21}$$

Commit 阶段

现在考虑用 $\lambda_1 \leftarrow \$F$ 将 f_0 折叠成 f_{λ_1} 的情况，即

$$f_{\lambda_1} = (1 - \lambda_1) \cdot f_{0,0} + \lambda_1 \cdot f_{0,1} \tag{22}$$

假设给定的参数 $\theta = \frac{1}{2}$ ，由于 λ_1 是选取自 F 的随机数，有可能出现下面这种情况：



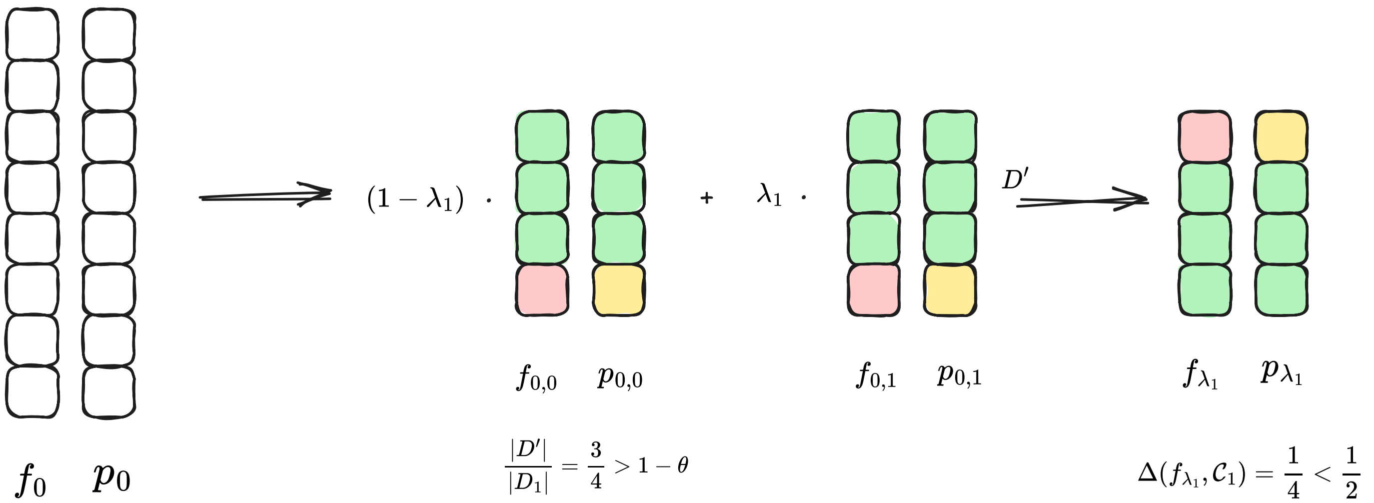
图中的 $p_0, p_{0,0}, p_{0,1}, p_{\lambda_1}$ 分别是对应 Reed-Solomon 编码空间中距离 $f_0, f_{0,0}, f_{0,1}, f_{\lambda_1}$ 最近的码字，颜色同为绿色表示它们在该点值相同，而不同的颜色表示在该点的值不同。可以看出，对于作恶的 Prover 提供的 f_0，其距离 Reed-Solomon 空间 $\mathcal{C}_0$ 的距离大于 $\theta = \frac{1}{2}$，但是经过 λ_1 进行折叠之后得到的 f_{λ_1} 距离 Reed-Solomon 空间 $\mathcal{C}_1$ 可能出现小于 θ 的情况，这样 f_1 在后续的协议中就会通过 Verifier 的折叠验证，P^* 就成功的欺骗了 Verifier 。

那么出现上述这种情况的概率是多少呢？其由 [BCIKS20] 给出的 Correlated Agreement 定理给出。该定理说的是，如果

$$\Pr_{\lambda_1 \in F}[\Delta((1-\lambda_1)f_{0,0} + \lambda_1 f_{0,1}, \mathcal{C}_1) \leq \theta] > \epsilon \tag{23}$$

其中 ϵ 是一个和 $\theta, \rho, |F|, |D_1|$ 相关的一个式子，也可写为 $\epsilon(\theta, \rho, |F|, |D_1|)$，并且在 unique decoding 和 list decoding 下其给出的形式也不同（这一部分留在在下一节中进行详细说明）。也就是，取遍 λ_1 在 F 中的所有可能，得到 f_{λ_1}，其中距离 $\mathcal{C}_1$ 不超过 θ 的比例超过了 ϵ，那么就一定存在一个子集 $D' \subset D_1$ 以及 $\mathcal{C}_1$ 中的码字 $p_{0,0}, p_{0,1}$ 使得

1. $|D'|/|D_1| \geq 1 - \theta$，
2. $f_{0,0}|_{D'} = p_{0,0}|_{D'}$ 以及 $f_{0,1}|_{D'} = p_{0,1}|_{D'}$ 。



现在我们能得到 $f_{0,0}$ 与 $f_{0,1}$ 不仅距离编码空间 $\mathcal{C}_1$ 比较近，同时它们共享一个相同的集合 D' 与对应的码字相同。这是一个很好的结论，可以帮我们来推导原来的 f_0 到 $\mathcal{C}_0$ 的距离。

通过映射 $\pi : x \mapsto x^2$ 可以将 D_0 中的点映射到 D_1，现在可用 π^{-1} 将 $D' \subseteq D_1$ 中的点映射回 D_0，例如，设 $\omega^8 = 1$ 及

$$D_0 = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5, \omega^6, \omega^7\} \tag{24}$$

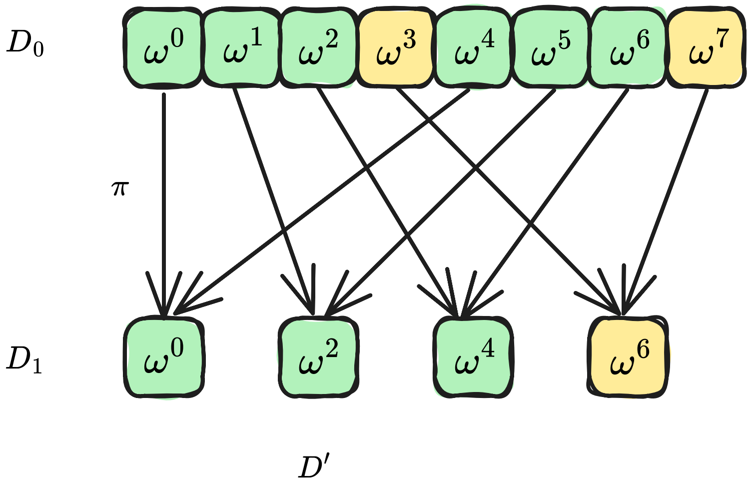
则通过映射 $\pi : x \mapsto x^2$ 可以得到

$$D_1 = \{\omega^0, \omega^2, \omega^4, \omega^6\} \tag{25}$$

假设 $D' = \{\omega^0, \omega^2, \omega^4\}$ ，那么可以得到

$$\pi^{-1}(D') = \{\omega^0, \omega^1, \omega^2, \omega^4, \omega^5, \omega^6\} \tag{26}$$

如下图所示：

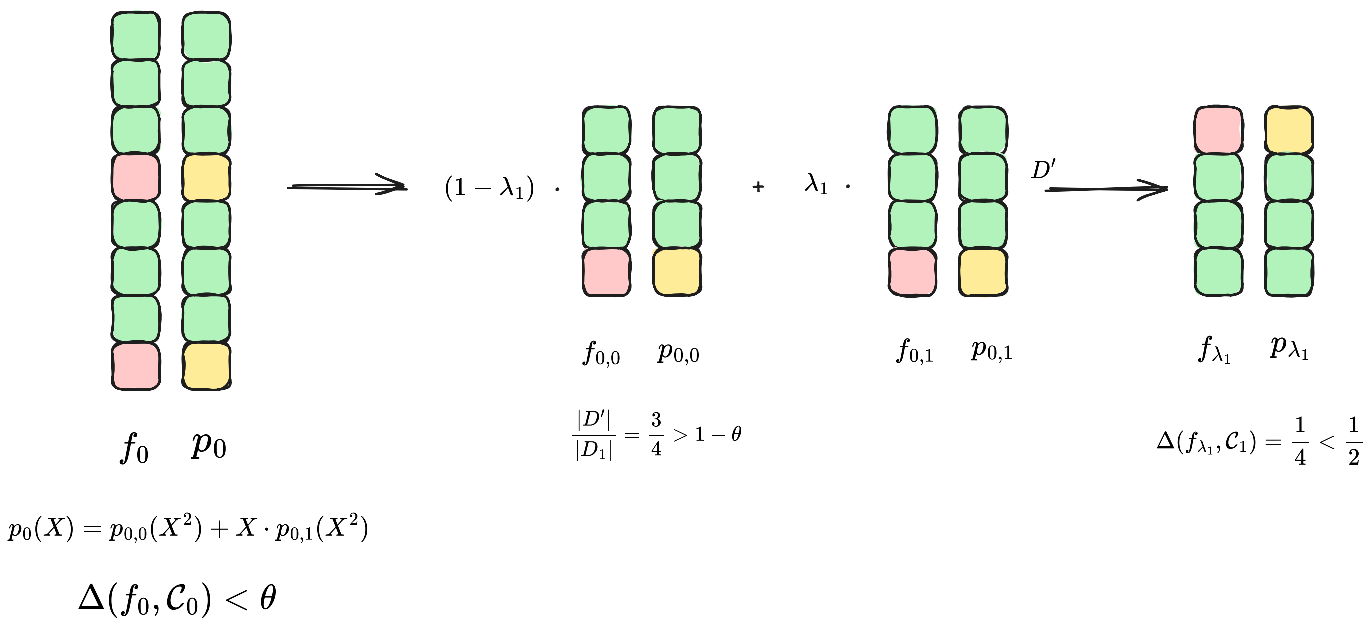


现在根据 correlated agreement 定理得到了 $f_{0,0}|_{D'} = p_{0,0}|_{D'}$ 以及 $f_{0,1}|_{D'} = p_{0,1}|_{D'}$ ，因此可以根据 $p_{0,0}$ 以及 $p_{0,1}$ 得到折叠之前的多项式

$$p_0(X) = p_{0,0}(X^2) + X \cdot p_{0,1}(X^2) \tag{27}$$

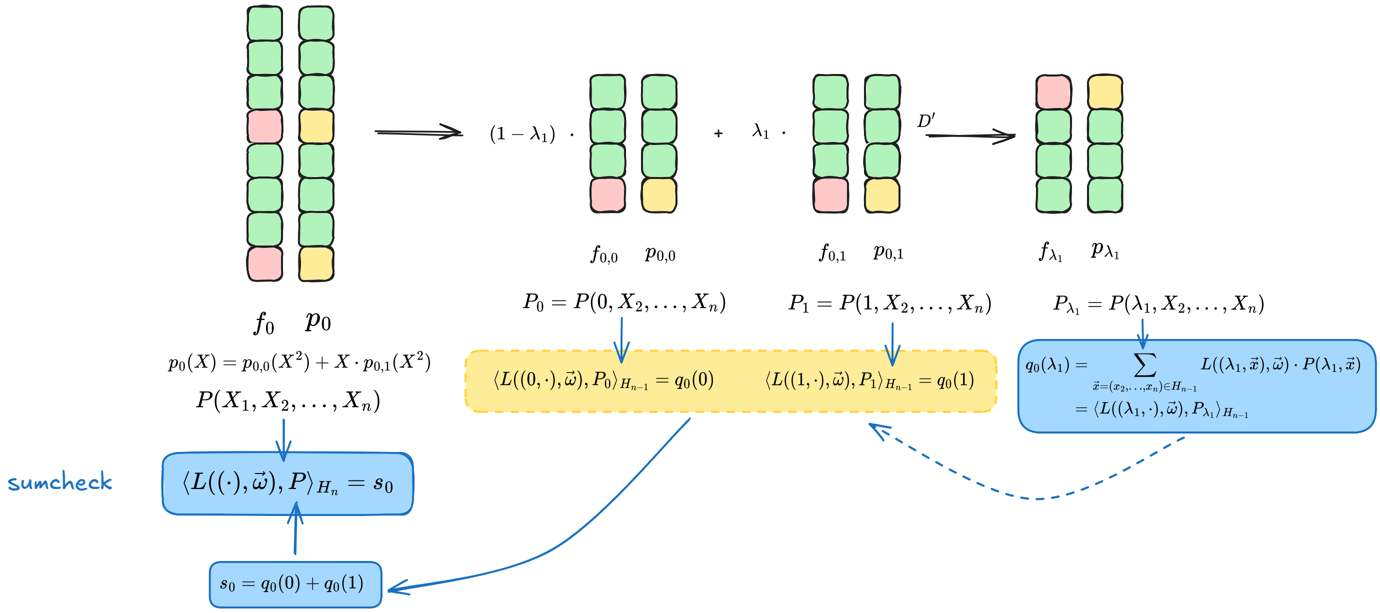
可以得出 $f_0(X)$ 与 $p_0(X)$ 在 $\pi^{-1}(D')$ 上的值是一致，由此也就得到了 $f_0(X)$ 到编码空间 $\mathcal{C}_0$ 的距离

$$\Delta(f_0, \mathcal{C}_0) \leq \frac{|\pi^{-1}(D')|}{|D_0|} \leq \theta \tag{28}$$



这也就能说明 Prover 没有作弊，函数 f_0 距离对应的编码空间不超过 θ 。回到最初的问题，我们想分析 Prover 作弊情况下，其能成功骗过 Verifier 的概率，现在 correlated agreement 定理告诉了我们除了一个概率 ϵ ，能确保 Prover 没有作弊，这也说明如果 Prover 作弊，能成功骗过 Verifier 的概率不会超过这个概率 ϵ 。

至此我们就分析完 Commit 阶段的 soundness error 了吗？回顾下上述分析，我们使用 correlated agreement 定理得到了由于折叠随机数 λ_1 的引入，导致折叠之后的多项式能骗过 Verifier 的概率，但是有一点要记住，Basefold 协议不仅要检查类似 FRI 的折叠是否正确，还要同时检查 sumcheck 的约束，因此上述分析是不够的。仿照上述 correlated agreement 定理的思路，在其基础上增加 sumcheck 的约束，如果存在的多项式 p_{λ_1} 对应的 $P_{\lambda_1} = P(\lambda_1, X_2, \ldots, X_n)$ 满足 sumcheck 约束，想得到 $p_{0,0}(X)$ 与 $p_{0,1}(X)$ 对应的 $P_0 = P(0, X_2, \ldots, X_n)$ 与 $P_1 = P(1, X_2, \ldots, X_n)$ 也满足 sumcheck 约束，这样我们就能推断折叠前是否满足 sumcheck 约束了。



现在考虑 sumcheck 约束，已知

$$\langle L((\lambda_1, \cdot), \vec{\omega}), P_{\lambda_1} \rangle_{H_{n-1}} = q_0(\lambda_1) \tag{29}$$

想得到

$$\langle L((0, \cdot), \vec{\omega}), P_0 \rangle_{H_{n-1}} = q_0(0) \tag{2}$$

$$\langle L((1, \cdot), \vec{\omega}), P_1 \rangle_{H_{n-1}} = q_0(1) \tag{3}$$

如果式 (2) 与式 (3) 成立，由于 $s_0 = q_0(0) + q_0(1)$ ，则可以得到由 $p_{0,0}(X)$ 与 $q_{0,1}(X)$ 得到的 $p_0(X)$ 对应的多元线性多项式 $P(X)$ 满足 sumcheck 约束。

下面根据[H24]在 3.2 节的思路，推导出式 (2) 与式 (3) 成立。根据 $q_i(X)$ 与 $\Lambda_i(X)$ 的关系，得到

$$q_0(\lambda_1) = L(\lambda_1, \omega_1) \cdot \Lambda_0(\lambda_1) \tag{30}$$

而

$$\langle L((\lambda_1, \cdot), \vec{\omega}), P_{\lambda_1} \rangle_{H_{n-1}} = L(\lambda_1, \omega_1) \cdot \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} \rangle_{H_{n-1}} \tag{31}$$

因此

$$L(\lambda_1, \omega_1) \cdot \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} \rangle_{H_{n-1}} = L(\lambda_1, \omega_1) \cdot \Lambda_0(\lambda_1) \tag{32}$$

由于 $L(X, \omega_1) = (1 - X)(1 - \omega_1) + X \cdot \omega_1$ 是一个一次多项式，因此，$L(X)$ 在 F 中只有一个零点，当 λ_1 取到该点时，就会有 $L(\lambda_1, \omega_1) = 0$ ，此时上式自然成立，而发生这样的概率为 $1/|F|$ 。若 $L(\lambda_1, \omega_1) \neq 0$ ，则有

$$\langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} \rangle_{H_{n-1}} = \Lambda_0(\lambda_1) \tag{33}$$

[H24] 论文中给出

$$\langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \tag{4}$$

在这里给出一个详细推导，由于 $P_{\lambda_1} = P(\lambda_1, X_2, \ldots, X_n)$ ，那么

$$
\begin{aligned}
\langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} \rangle_{H_{n-1}} &= \sum_{\vec{x} \in H_{n-1}} L(\vec{x}, (\omega_2, \ldots, \omega_n)) \cdot P(\lambda_1, \vec{x}) \\
&= P(\lambda_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)
\end{aligned} \tag{34}
$$

那么上面的等式即为

$$
P(\lambda_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \Lambda_0(\lambda_1) \tag{35}
$$

设一个函数为 $P'(X_2, \ldots, X_n) = P(\lambda_1, X_2, \ldots, X_n) - \Lambda_0(\lambda_1)$ ，其在点 $(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ 处的求值为 $P'(\omega_2, \ldots, \omega_n) = 0$ ，且 $P'(\omega_2, \ldots, \omega_n)$ 可表示为

$$
\begin{aligned}
P'(\omega_2, \ldots, \omega_n) &= \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P'(\cdot) \rangle_{H_{n-1}} \\
&= \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P(\lambda_1, \cdot) - \Lambda_0(\lambda_1) \rangle_{H_{n-1}} \\
&= \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1) \rangle_{H_{n-1}} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{36}
$$

因此

$$
\langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \tag{37}
$$

由线性性知

$$
\Lambda_0(\lambda_1) = (1 - \lambda_1) \cdot \Lambda_0(0) + \lambda_1 \cdot \Lambda_0(1) \tag{5}
$$

同时

$$
f_{\lambda_1} = (1 - \lambda_1) \cdot f_{0,0} + \lambda_1 \cdot f_{0,1} \tag{6}
$$

由等式 (6) 减去 (5) 得到

$$
f_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1) = (1 - \lambda_1) \cdot (f_{0,0} - \Lambda_0(0)) + \lambda_1 \cdot (f_{0,1} - \Lambda_0(1)) \tag{38}
$$

令新的多项式

$$
f'_{\lambda_1} = (1 - \lambda_1) \cdot (f_{0,0} - \Lambda_0(0)) + \lambda_1 \cdot (f_{0,1} - \Lambda_0(1)) \tag{39}
$$

依照之前 correlated agreement 定理的思路，根据条件，若

$$
\Pr_{\lambda_1 \in F}[\Delta((1 - \lambda_1) f_{0,0} + \lambda_1 f_{0,1}, \mathcal{C}_1) \le \theta] > \epsilon \tag{40}
$$

也就是 f_{λ_1} 距离 p_{λ_1} 不超过 θ 大于一个界限 ϵ ，那么它们同时减去一个数 $\Lambda_0(\lambda_1)$ ，并不影响它们之间的距离，因此 f'_{λ_1} 距离 $p'_{\lambda_1} = p_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1)$ 不超过 θ 。

$p'_{\lambda_1} = p_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1)$ 属于哪个编码空间呢？我们知道 $p_{\lambda_1} \in \mathcal{P}_{n-1} = F[X]^{<2^{n-1}}$ ，而 $\Lambda_0(\lambda_1)$ 本质上是一个数，因此 p'_{λ_1} 依然在 $\mathcal{P}_{n-1}$ 空间中。同时我们上面已经推导出

$$
\langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \tag{41}
$$

说明 p'_{λ_1} 对应的多元线性多项式还满足一个这样的内积约束，因此可以说 p'_{λ_1} 在 $\mathcal{P}_{n-1}$ 的一个子空间中，即

$$
\mathcal{P}'_{n-1} = \{u(X) \in \mathcal{P}_{n-1} : \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), U \rangle_{H_{n-1}} = 0\} \tag{42}
$$

上式中的 U 就是与 $u(X)$ 相对应的多元线性多项式。由这样的一个多项式子空间可以形成编码空间 $\mathcal{C}_1$ 的线性子码 $\mathcal{C}'_1$ 。可以看到，通过将 $q_i(X)$ 中的线性项 $\Lambda_i(X)$ 提出来，添加了类似 sumcheck 的约束之后，发现要考虑的编码空间是原来编码空间的一个线性子空间。

现在总结下目前得到的结论，记 $f'_{0,0} := f_{0,0} - \Lambda_0(0)$, $f'_{0,1} := f_{0,1} - \Lambda_0(1)$ ，有

$$
f'_{\lambda_1} = (1 - \lambda_1) \cdot f'_{0,0} + \lambda_1 \cdot f'_{0,1} \tag{43}
$$

同时，f'_{λ_1} 距离 $p'_{\lambda_1} = p_{\lambda_1} - \Lambda_0(\lambda_1)$ 不超过 θ 大于 ϵ ， $p'_{\lambda_1} \in \mathcal{P}'_{n-1}$ ，即

$$\Pr_{\lambda_1 \in F}[\Delta((1-\lambda_1)f'_{0,0} + \lambda_1 f'_{0,1}, \mathcal{C}'_1) \le \theta] > \epsilon \tag{44}$$

[H24, Theorem 3] 就给出了关于线性子码的 correlated agreement 定理，其严格描述留在下一节中进行介绍。该定理结论给出，会存在来自 $\mathcal{P}'_{n-1}$ 的多项式 $p'_{0,0}$ 以及 $p'_{0,1}$ ，以及 $D' \subseteq D_1$ ，满足

1. $|D'|/|D_1| \ge 1-\theta$,
2. $f'_{0,0}|_{D'} = p'_{0,0}|_{D'}$ 以及 $f'_{0,1}|_{D'} = p'_{0,1}|_{D'}$ 。

这里 $\mathcal{P}'_{n-1}$ 就包含了 sumcheck 的约束。根据 $f'_{0,0}$ 和 $f'_{0,1}$ 的定义可以得到

$$\begin{aligned} f_{0,0} &= f'_{0,0} + \Lambda_0(0) \\ f_{0,1} &= f'_{0,1} + \Lambda_0(1) \end{aligned} \tag{45}$$

由于 $\Lambda_0(0)$ 与 $\Lambda_0(1)$ 本质上都表示一个数，根据结论 2 ，就有

$$\begin{aligned} f_{0,0}(X)|_{D'} &= p'_{0,0}(X)|_{D'} + \Lambda_0(0) = (p'_{0,0}(X) + \Lambda_0(0))|_{D'} \\ f_{0,1}(X)|_{D'} &= p'_{0,1}(X)|_{D'} + \Lambda_0(1) = (p'_{0,1}(X) + \Lambda_0(1))|_{D'} \end{aligned} \tag{46}$$

令

$$\begin{aligned} p_{0,0}(X) &= p'_{0,0}(X) + \Lambda_0(0) \\ p_{0,1}(X) &= p'_{0,1}(X) + \Lambda_0(1) \end{aligned} \tag{47}$$

因此 $f_{0,0}(X), f_{0,1}(X)$ 分别与 $p_{0,0}(X), p_{0,1}(X)$ 在 D' 上是一致的。由 $p_{0,0}(X), p_{0,1}(X)$ 可以分别得到它们对应的多元多项式 $P_0, P_1 \in F[X_2, \ldots, X_n]$ 。而 $p'_{0,0}(X), p'_{0,1}(X) \in \mathcal{P}'_{n-1}$ ，因此它们对应的多元线性多项式 $P'_{0,0}, P'_{0,1}$ 满足

$$\begin{aligned} \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P'_{0,0} \rangle_{H_{n-1}} &= 0 \\ \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P'_{0,1} \rangle_{H_{n-1}} &= 0 \end{aligned} \tag{48}$$

因此

$$\begin{aligned} & \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P'_{0,0} + \Lambda_0(0) - \Lambda_0(0) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \\ & \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P'_{0,1} + \Lambda_0(1) - \Lambda_0(1) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \\ \Rightarrow & \\ & \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_0 - \Lambda_0(0) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \\ & \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_1 - \Lambda_0(1) \rangle_{H_{n-1}} = 0 \\ \Rightarrow & \\ & \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_0 \rangle_{H_{n-1}} = \Lambda_0(0) \\ & \langle L(\cdot, \omega_2, \ldots, \omega_n), P_1 \rangle_{H_{n-1}} = \Lambda_0(1) \end{aligned} \tag{49}$$

在上式两边分别同时乘以 $L(0, \omega_1), L(1, \omega_1)$ ，由 $q_0(X) = L(X, \omega_1) \cdot \Lambda_0(X)$ 可得

$$\begin{aligned} \langle L((0, \cdot), \vec{\omega}), P_0 \rangle_{H_{n-1}} &= q_0(0) \\ \langle L((1, \cdot), \vec{\omega}), P_1 \rangle_{H_{n-1}} &= q_0(1) \end{aligned} \tag{50}$$

至此也就说明了式 (2) 与式 (3) 成立，也就能推出 $p_0(X)$ 对应的 $P(X)$ 是满足 sumcheck 约束的。

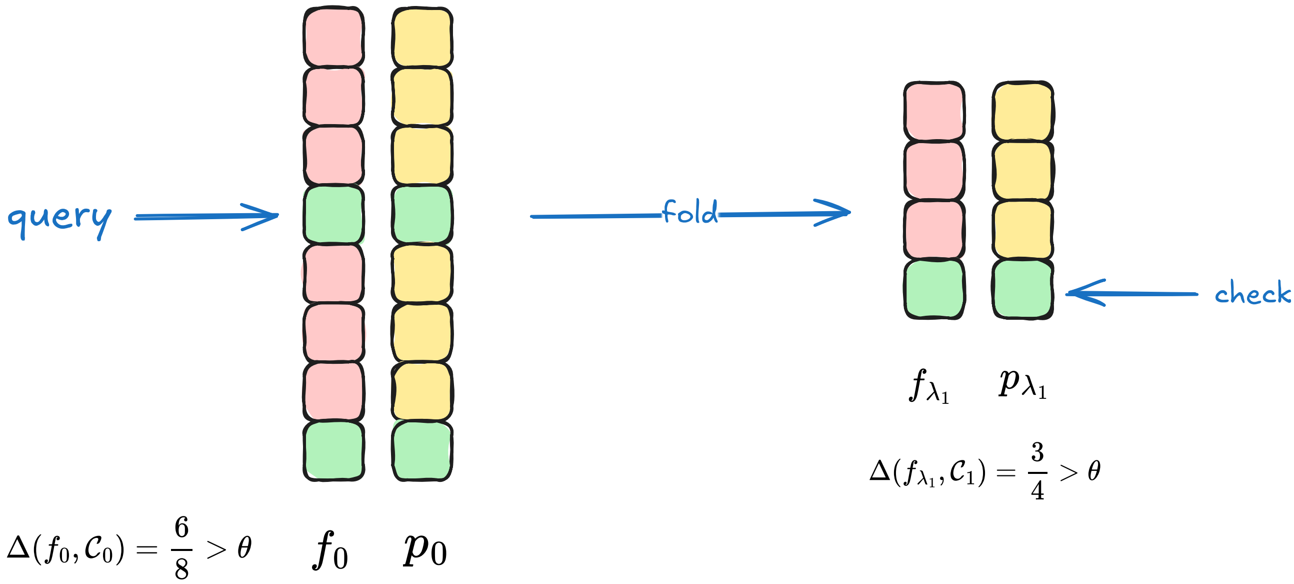
综上，在 commit 阶段的 soundness error 可以按上述思路分析，具体概率由 correlated agreement 给出。[H24, Theorem 1] 给出 commit 阶段的 soundness error 为

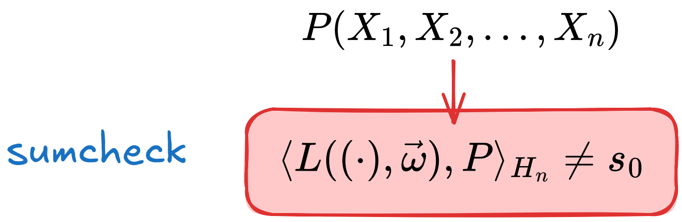
1. batching 阶段：$\varepsilon_{C_1} = \varepsilon(\mathcal{C}_0, M, 1, \theta)$ 。
2. sumcheck 与类似 FRI 折叠阶段：$\varepsilon_{C_2} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|F|} + \varepsilon(\mathcal{C}_i, 1, B_i, \theta) \right)$ ，其中 $\frac{1}{|F|}$ 就是在化简 sumcheck 约束时要使得 $L(X, \omega_i) = 0$ 额外引入的。

上述 $\varepsilon(\mathcal{C}_i, M_i, B_i, \theta)$ 是由 [H24, Theorem 4] 带权重的 weighted correlated agreement 定理给出的。

Query 阶段

对于一个作恶的 Prover P^* ，现在排除在 Commit 阶段出现能侥幸通过 Verifier 检查的情况，经过一次折叠，f_{λ_1} 会出现离 $\mathcal{C}_1$ 有 θ 远，或者 sumcheck 约束不正确。





对于 $\Delta(f_0, \mathcal{C}_0) > \theta$ ，由于 Verifier 会在 D_0 中随机选取一个 x_0 来检查折叠是否正确，因此如果查询到那些 f_{λ_1} 和 p_{λ_1} 在 D_1 上一致的那些点，则会检查通过。这个比例不超过 $1-\theta$ ，如果重复查询 s 次，那么 P^* 侥幸通过检查的概率不超过 $(1-\theta)^s$ 。

对于 sumcheck 约束不正确的情况，verifier 会用 sumcheck 协议来检查约束是否正确，这里 P^* 不可能作弊成功，一定能被检查出来。

综上，在 query 阶段 soundness error 为 $\varepsilon_{\text{query}} = (1-\theta)^s$ 。

因此，就得到了 [H24, Theorem 1] 给出的整个协议的 soundness error

$$\begin{aligned} \varepsilon &< \varepsilon_{C_1} + \varepsilon_{C_2} + \varepsilon_{\text{query}} \\ &= \varepsilon(\mathcal{C}_0, M, 1, \theta) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{|F|} + \varepsilon(\mathcal{C}_i, 1, B_i, \theta) \right) + (1-\theta)^s \end{aligned} \tag{51}$$

> 🐞 **typo** 我认为 [H24, Theorem 1] 条件中给出的 $\theta = (1 + \frac{1}{2m}) \cdot \sqrt{\rho}$ 有误，根据后文的 [H24, Theorem 4] 给出的条件，应该改为 $\theta = 1 - (1 + \frac{1}{2m}) \cdot \sqrt{\rho}$ 。

Correlated agreement 定理

本小节介绍 [BCIKS20] 给出的 correlated agreement 定理，以及 [H24] 在此基础上给出的针对 subcodes 的 correlated agreement 定理。

首先是 [BCIKS20] 给出的 correlated agreement 定理，分为 unique decoding 界和在 list decoding 下达到 Johnson 界两个定理，符号上做了一些变化。令 F 表示一个有限域，$\mathcal{C} = RS_k[F, D]$ 表示在 F 上的 Reed-Solomon code，其 evaluation domain 为 D ，码率为 $\rho = k/|D|$ 。

Theorem 3 [BCIKS20, Theorem 6.1] 假设 $\theta \le \frac{1-\rho}{2}$. 令 $f_0, f_1, \ldots, f_M \in F^D$ 表示 $D \to F$ 的函数。若

$$\frac{|\{z \in F : \Delta(f_0 + z \cdot f_1 + \ldots + z^M \cdot f_M, \mathcal{C}) \le \theta\}|}{|F|} > \varepsilon \tag{52}$$

其中

$$\varepsilon = M \cdot \frac{|D|}{|F|} \tag{53}$$

那么对于任意的 $z \in F$ ，有

$$\Delta(f_0 + z \cdot f_1 + \ldots + z^M \cdot f_M, \mathcal{C}) \le \theta, \tag{54}$$

另外，存在 $p_0, \ldots, p_M \in \mathcal{C}$ 使得对所有的 $z \in F$ ，有

$$\Delta(u_0 + zu_1 + \cdots + z_l u_l, v_0 + zv_1 + \cdots + z_l v_l) \le \theta \tag{55}$$

事实上，

$$|\{x \in D : (u_0(x), \ldots, u_l(x)) \ne (v_0(x), \ldots, v_l(x))\}| \le \theta |D|. \tag{56}$$

Theorem 4 [BCIKS20, Theorem 6.2] 令 $f_0, f_1, \ldots, f_M \in F^D$ 表示 $D \to F$ 的函数。设 $m \ge 3$ ，定义 $\theta_0(\rho, m) := 1 - \sqrt{\rho} \cdot (1 + \frac{1}{2m})$ ，令 $\theta \le \theta_0(\rho, m)$ ，若

$$\frac{|\{z \in F : \Delta(f_0 + z \cdot f_1 + \ldots + z^M \cdot f_M, \mathcal{C}) \le \theta\}|}{|F|} > \varepsilon \tag{57}$$

其中

$$\varepsilon = M \cdot \frac{(m + \frac{1}{2})^7}{3 \cdot \rho^{3/2}} \cdot \frac{|D|^2}{|F|} \tag{58}$$

那么 $f_0, f_1, \ldots, f_M$ 同时都距离 $\mathcal{C}_0$ 有 θ 近，即存在 $p_0, \ldots, p_M \in \mathcal{C}$ 使得

$$|\{x \in D : \forall 0 \le i \le M, f_i(x) = p_i(x)\}| \ge (1 - \theta)|D|. \tag{59}$$

Theorem 3 和 Theorem 4 分别给出了 unique decoding 和 list decoding 下的 correlated agreement 定理，虽然表述形式和上一节中给出的有所区别，但表达的含义是一样的，这里就给出了具体的 ε 表达式。

在论文 [H24] 中，通过分析 [BCIKS20] 中 correlated agreement 定理证明中的 Guruswami-Sudan list decoder，得到了在 list decoding 下针对 subcode 的 correlated agreement 定理。

Theorem 5 [H24, Theorem 3] (Correlated Agreement for Subcodes) 令 F 表示一个任意特征(characteristic)的有限域，$\mathcal{C} = RS_k[F, D]$ 表示在 F 上的 Reed-Solomon code，其 evaluation domain 为 D ，码率为 $\rho = k/|D|$ 。令 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个线性子码(linear subcode)，由一个来自于 $F[X]^{<k}$ 的多项式的子空间 $\mathcal{P}'$ 生成。给定一个 proximity 参数 $\theta = 1 - \sqrt{\rho} \cdot \left(1 + \frac{1}{2m}\right)$ ，其中 $m \ge 3$ ，且 $f_0, f_1, \ldots, f_M \in F^D$ 满足

$$\frac{|\{z \in F : \Delta(f_0 + z \cdot f_1 + \ldots + z^M \cdot f_M, \mathcal{C}') < \theta\}|}{|F|} > \varepsilon, \tag{60}$$

其中

$$\varepsilon = M \cdot \frac{(m + \frac{1}{2})^7}{3 \cdot \rho^{3/2}} \cdot \frac{|D|^2}{|F|}, \tag{61}$$

则存在多项式 $p_0, p_1, \ldots, p_M \in \mathcal{P}'$ ，以及一个集合 $D' \subseteq D$ ，满足

1. $|D'|/|D| \ge 1 - \theta$

2. $f_0, f_1, \ldots, f_M$ 与 $p_0, p_1, \ldots, p_M$ 分别在 D' 上是一致的。

对比 Theorem 5 和 Theorem 4，从 ε 的表达式来说，它们的形式可以说是一致的，不同的是 Theorem 5 是在 Reed-Solomon 编码空间的一个线性子码中考虑的。这里自然推测对于 unique decoding，针对 subcode 也有类似 Theorem 4 的结果。

Conjecture 6 令 F 表示一个任意特征(characteristic)的有限域，$\mathcal{C} = RS_k[F, D]$ 表示在 F 上的 Reed-Solomon code，其 evaluation domain 为 D，码率为 $\rho = k/|D|$。令 $\mathcal{C}'$ 为 $\mathcal{C}$ 的一个线性子码(linear sucode)，由一个来自于 $F[X]^{<k}$ 的多项式的子空间 $\mathcal{P}'$ 生成。设 $\theta \leq \frac{1-\rho}{2}$，且 $f_0, f_1, \ldots, f_M \in F^D$ 满足

$$\frac{|\{z \in F : \Delta(f_0 + z \cdot f_1 + \ldots + z^M \cdot f_M, \mathcal{C}') < \theta\}|}{|F|} > \varepsilon, \tag{62}$$

其中

$$\varepsilon = M \cdot \frac{|D|}{|F|} \tag{63}$$

则存在多项式 $p_0, p_1, \ldots, p_M \in \mathcal{P}'$，以及一个集合 $D' \subseteq D$，满足

1. $|D'|/|D| \geq 1 - \theta$
2. $f_0, f_1, \ldots, f_M$ 与 $p_0, p_1, \ldots, p_M$ 分别在 D' 上是一致的。

类似在 [BCIKS20] 中对 batch FRI 协议的 soundness 证明，其用到的是 weighted 版本的 correlated agreement 定理，对于 batch Basefold 协议，在 [H24] 中也给出了 weighted correlated agreement 定理。根据 [H24] 中的描述，首先说明下 weighted 的含义，在 D 上给定一个子概率测度 μ 以及 $f \in F^D$，记

$$\text{agree}_\mu(f, \mathcal{C}') \geq 1 - \theta \tag{64}$$

含义是存在在 $\mathcal{P}'$ 中的一个多项式 $p(X)$，使得 $\mu(\{x \in D : f(x) = p(x)\}) \geq 1 - \theta$。意思是用测度 μ 去计算那些在集合 D 中满足 $f(x) = p(x)$ 的 x 组成的集合。为了完整性，下面直接列出 [H24] 中给出的在 list decoding 下的 weighted correlated agreement 定理。

Theorem 7 [H24, Theorem 4] (Weighted Correlated Agreement for Subcodes) Let C' be a linear subcode of $RS_k[F, D]$, and choose $\theta = 1 - \sqrt{\rho} \cdot \left(1 + \frac{1}{2m}\right)$, for some integer $m \geq 3$, where $\rho = k/|D|$. Assume a density function $\delta : D \to [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ with common denominator $B \geq 1$, i.e. for all x in D,

$$\delta(x) = \frac{m_x}{B}, \tag{65}$$

for an integer value $m_x \in [0, B]$, and let μ be the sub-probability measure with density δ, defined by $\mu(\{x\}) = \delta(x)/|D|$. If for $f_0, f_1, \ldots, f_M \in F^D$,

$$\frac{\{z \in F : \text{agree}_\mu(f_0 + z \cdot f_1 + \ldots + z^M \cdot f_M, \mathcal{C}') \geq 1 - \theta\}}{|F|} > \varepsilon(\mathcal{C}, M, B, \theta) \tag{66}$$

where

$$\varepsilon(\mathcal{C}, M, B, \theta) = \frac{M}{|F|} \cdot \frac{(m + \frac{1}{2})}{\sqrt{\rho}} \cdot \max\left(\frac{(m + \frac{1}{2})^6}{3 \cdot \rho} \cdot |D|^2, 2 \cdot (B \cdot |D| + 1)\right), \tag{67}$$

then there exist polynomials $p_0(X), p_1(X), \ldots, p_M(X)$ belonging to the subcode $\mathcal{C}'$, and a set A with $\mu(A) \geq 1 - \theta$ on which $f_0, f_1, \ldots, f_M$ coincide with $p_0(X), p_1(X), \ldots, p_M(X)$, respectively.

weighted correlated agreement 定理的好处是，在协议 soundness 证明的过程中，μ 是可以自己定义的，提高了灵活性。关于 Basefold 协议的 soundness 证明细节在下一篇文章中介绍。

References

- [H24] Ulrich Haböck. "Basefold in the List Decoding Regime." *Cryptology ePrint Archive*(2024).
- [ZCF23] Hadas Zeilberger, Binyi Chen, and Ben Fisch. "BaseFold: efficient field-agnostic polynomial commitment schemes from foldable codes." Annual International Cryptology Conference. Cham: Springer Nature Switzerland, 2024.
- [BCIKS20] Eli Ben-Sasson, Dan Carmon, Yuval Ishai, Swastik Kopparty, and Shubhangi Saraf. Proximity Gaps for Reed–Solomon Codes. In *Proceedings of the 61st Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 900–909, 2020.
- [ACFY24] Gal Arnon, Alessandro Chiesa, Giacomo Fenzi, and Eylon Yogev. "WHIR: Reed–Solomon Proximity Testing with Super-Fast Verification."*Cryptology ePrint Archive*(2024).